Théorie relativiste linéaire du champ gravitationnel faible

Application au problème du disque tournant

Inauguraldissertation
der
philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

JEAN CHEVALIER

von Moutier

Von der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag von Herrn Prof. Dr. Willy Scherrer angenommen.

Der Dekan: Kurt Huber

Bern, den 29. Januar 1970

Typo-offset Robert S. A.
Moutier
1970

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547627_0019

THEORIE RELATIVISTE LINEAIRE

DU CHAMP GRAVITATIONNEL FAIBLE

APPLICATION AU PROBLEME DU DISQUE TOURNANT

INAUGURALDISSERTATION

der

philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der

Universität Bern

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Chevalier Jean

von Moutier

Von der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag von Herrn Prof. Dr. Willy Scherrer angenommen.

Der Dekan: Kurt Huber

Bern, den 29. Januar 1970

Typo-offset Robert S.A.
Moutier
- 1970 -

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A la mémoire de mon père

A ma mère

TABLE DES MATIERES

Chapitre I. Introduction. La théorie linéaire du champ unitaire de Scherrer.

1. Introduction 1
2. Les formes linéaires fondamentales 2
3. Dérivation covariante. Courbure 4
4. La transformation de Lorentz et le groupe des formes 5
5. Principe de moindre action et équations de champ 8

Chapitre II. Les équations de champ en première approximation. Cas gravitationnel.

1. Expression générale des équations de champ en première approximation pour le vide 11
2. Expression détaillée des équations de champ approchées 17

Chapitre III. Ondes gravitationnelles planes. Energie et impulsion.

1. Ondes gravitationnelles planes 19
2. Energie et impulsion 21

Chapitre IV. Champ gravitationnel à symétrie sphérique.

1. Potentiels de gravitation 24
2. Energie 27

Chapitre V. Champ gravitationnel à symétrie cylindrique.

1. Cas extérieur 29
2. Cas intérieur: fluide incompressible parfait 30

Chapitre VI. Les équations de champ en deuxième approximation. Cas gravitationnel.

1. Deuxième approximation des équations de champ pour le vide 37
2. Champ gravitationnel d'une particule chargée 41

Chapitre VII. Application de la théorie linéaire au problème du disque tournant.

1. Aperçu historique du problème 44
2. Solution exacte dans le cas extérieur 50
3. Les différents types de solutions approchées dans le cas intérieur 52
4. Méthode a): ω et ρ petits 54
5. Méthode b): ω quelconque, ρ petit 57

Chapitre VIII. Résumé et conclusion 68

Bibliographie 70

CHAPITRE I

INTRODUCTION

LA THEORIE LINEAIRE DU CHAMP UNITAIRE DE SCHERRER [1)]

1. Introduction.

Depuis la publication, en 1916, de la théorie de la relativité générale d'Einstein (RG), de nombreux auteurs se sont efforcés de linéariser ladite théorie. La plupart d'entre eux ont essayé de remplacer les célèbres équations non linéaires d'Einstein par leur approximation linéaire, notamment en vue de la quantification du champ gravitationnel. Ces tentatives, parmi lesquelles on peut citer principalement les théories de Rosenfeld et de Birkhoff ({1}-{3}), se sont généralement heurtées à de très sérieuses difficultés, qui ne permettent guère de conclure à leur succès.

De son côté, Dirac s'est proposé de linéariser la forme quadratique fondamentale en posant:

$$ds \equiv \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \equiv \gamma_\mu dx^\mu \tag{I-1}$$

où les γ_μ sont les matrices de Dirac, satisfaisant aux relations de commutation:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \equiv 2 g_{\mu\nu} \tag{I-2}$$

Mis à part le caractère matriciel des coefficients γ_μ, l'expression $\gamma_\mu dx^\mu$ possède alors la même structure que la

[1)] Ce chapitre contient l'essentiel d'un cours donné par M. Scherrer à l'Université de Berne (sem. hiver 1963-64).

forme différentielle fondamentale de l'électrodynamique relativiste dans le vide, $d\sigma \equiv \Phi_\mu dx^\mu$ ($\Phi_\mu \equiv$ potentiel vectoriel).

L'idée fondamentale de Scherrer ({4}-{14}) constitue en quelque sorte le contre-pied de celle de Dirac. Au lieu de linéariser ds^2 en en extrayant la racine carrée selon (I-1), il s'agit maintenant de reconstituer ds^2 par multiplication de formes différentielles linéaires du type $\Phi_\mu dx^\mu$.

2. Les formes linéaires fondamentales.

Dans l'espace-temps quadridimensionnel rapporté à un système de référence arbitraire (x^0, x^1, x^2, x^3), on considère les 4 formes différentielles linéaires invariantes suivantes:

$$g^{\lambda\prime} \equiv g^{\lambda}{}_{;\mu}\dot{x}^\mu \qquad \text{(I-3)}$$

où les $g^{\lambda}{}_{;\mu}$ sont des fonctions des x^μ. Le déterminant g de la matrice $(g^{\lambda}{}_{;\mu})$ doit être différent de 0. Dans les formules (I-3), μ est un indice tensoriel ordinaire (tenseurs-coordonnées), alors que λ permet de numéroter les 4 formes $g^{\lambda\prime}$ et constitue un indice tensoriel correspondant à un nouveau type de tenseurs, que nous appellerons tenseurs-formes. En fait, nous verrons plus loin (I,4) que les $g^{\lambda\prime}$ sont des tenseurs par rapport aux transformations du groupe de Lorentz. Dans ce sens, les $g^{\lambda}{}_{;\mu}$ sont alors des bitenseurs.

Inversons et transposons la matrice $(g^{\lambda}{}_{;\mu})$. Nous obtiendrons la matrice $(g_{\lambda}{}^{;\mu})$ (λ: indice de ligne, μ: indice de colonne), que nous nommerons la matrice transverse de $(g^{\lambda}{}_{;\mu})$:

$$(I\text{-}4) \qquad (g_{\lambda}{}^{;\mu}) \equiv \{(g^{\lambda}{}_{;\mu})^{-1}\}^{*}$$

Les éléments de ces matrices satisfont aux relations suivantes:

$$(I\text{-}5) \qquad g^{\lambda}{}_{;\nu} g_{\mu}{}^{;\nu} \equiv \delta^{\lambda}_{\mu}$$

$$(I\text{-}5') \qquad g^{\nu}{}_{;\lambda} g_{\nu}{}^{;\mu} \equiv \delta^{\mu}_{\lambda}$$

Lors d'une transformation régulière de coordonnées: $x^{\lambda} \equiv x^{\lambda}(\bar{x}^{\mu})$, les $g^{\lambda}{}_{;\mu}$ et les $g_{\lambda}{}^{;\mu}$ se transforment comme des vecteurs covariants, respectivement contravariants:

$$(I\text{-}6) \qquad \bar{g}^{\lambda}{}_{;\mu} \equiv \alpha^{\nu}_{\mu} g^{\lambda}{}_{;\nu}$$

$$(I\text{-}6') \qquad \bar{g}_{\lambda}{}^{;\mu} \equiv \bar{\alpha}^{\mu}_{\nu} g_{\lambda}{}^{;\nu}$$

où $\alpha^{\nu}_{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}}$ et $\bar{\alpha}^{\mu}_{\nu} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$. En dérivant les relations (I-6) par rapport à $\bar{x}^{\sigma}$, on montre aisément que les quantités:

$$(I\text{-}7) \qquad f^{\lambda}{}_{;\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{\lambda}{}_{;\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g^{\lambda}{}_{;\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

sont les composantes d'un tenseur antisymétrique covariant d'ordre 2. En revanche, les quantités symétriques:

$$(I\text{-}8) \qquad \gamma^{\lambda}{}_{;\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{\lambda}{}_{;\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g^{\lambda}{}_{;\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

ne sont pas les composantes d'un tenseur. Le tenseur $f^{\lambda}{}_{;\mu\nu}$ joue un rôle fondamental dans la présente théorie. En particulier, nous verrons plus loin que le vide peut se caractériser par les relations: $f^{\lambda}{}_{;\mu\nu} \equiv 0$.

Posons, par définition:

$$(I\text{-}9) \qquad \gamma_{;\mu\nu}^{\lambda} \equiv g_{\alpha}{}^{;\lambda} \gamma^{\alpha}{}_{;\mu\nu}$$

(les $g^{\lambda}{}_{;\mu}$ et les $g_{\lambda}{}^{;\mu}$ permettent ainsi, en quelque sorte, de transformer des indices-formes en indices-tenseurs et réciproquement, la règle illustrée par (I-9) étant d'ailleurs générale). Nous verrons plus loin que les symboles $\gamma^{\lambda}_{;\mu\nu}$ ainsi définis sont à la théorie linéaire (TL) ce que les $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont à la théorie quadratique (TQ) (v. le paragraphe consacré à la dérivation covariante et à la courbure).

3. Dérivation covariante. Courbure.

En TQ classique, les expressions:

$$\partial_{\mu} v^{\lambda} \equiv \frac{\partial v^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} v^{\alpha} \tag{I-10}$$

sont les composantes d'un tenseur, appelé dérivée covariante du vecteur (contravariant) v^{λ}. En TL, formons par analogie les quantités:

$$\partial_{,\mu} v'^{\lambda} \equiv \frac{\partial v'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \gamma^{\lambda}_{;\mu\alpha} v'^{\alpha} \tag{I-11}$$

On démontre aisément que ces expressions possèdent un caractère tensoriel. Par définition, le tenseur en question est la <u>dérivée covariante</u> (en TL) du vecteur v'^{λ}. Nous aurons de même:

$$\partial_{,\mu} v_{,\lambda} \equiv \frac{\partial v_{,\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \gamma^{\alpha}_{;\mu\lambda} v_{,\alpha} \tag{I-12}$$

$$\partial_{,\nu} T^{\lambda}_{;\mu} \equiv \frac{\partial T^{\lambda}_{;\mu}}{\partial x^{\nu}} + \gamma^{\lambda}_{;\nu\alpha} T^{\alpha}_{;\mu} - \gamma^{\alpha}_{;\nu\mu} T^{\lambda}_{;\alpha} \tag{I-12'}$$

etc..

Il est dès lors naturel d'examiner, toujours par analogie avec la TQ, le caractère des expressions suivantes:

$$r^{\lambda}_{;\rho\sigma\tau} \equiv \frac{\partial \gamma^{\lambda}_{;\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} - \frac{\partial \gamma^{\lambda}_{;\rho\tau}}{\partial x^{\sigma}} + \gamma^{\lambda}_{;\tau\alpha} \gamma^{\alpha}_{;\rho\sigma} - \gamma^{\lambda}_{;\sigma\alpha} \gamma^{\alpha}_{;\rho\tau} \tag{I-13}$$

On montre facilement que l'on a affaire à un tenseur d'ordre 4, le tenseur de courbure de la TL. En contractant les indices λ et σ, on obtient (définition):

$$(I\text{-}14) \qquad r'_{\rho\tau} \equiv r'^{\lambda}{}_{\rho\lambda\tau}$$

Contrairement à ce qui se passe en TQ, $r_{,\rho\tau}$ n'est pas symétrique: $r_{,\rho\tau} \neq r_{,\tau\rho}$. Le tenseur (I-13) permet d'établir les formules de commutation:

$$(I\text{-}15) \qquad (\partial_{,\sigma}\partial_{,\rho} - \partial_{,\rho}\partial_{,\sigma})T'^{\lambda}{}_{\mu} \equiv r'^{\lambda}{}_{\alpha\rho\sigma}T'^{\alpha}{}_{\mu} - r'^{\alpha}{}_{\mu\rho\sigma}T'^{\lambda}{}_{\alpha}$$

Par analogie avec les identités de Bianchi de la TQ, on démontre les relations suivantes:

$$(I\text{-}16) \qquad \partial_{,\rho}r'^{\lambda}{}_{\mu\sigma\tau} + \partial_{,\sigma}r'^{\lambda}{}_{\mu\tau\rho} + \partial_{,\tau}r'^{\lambda}{}_{\mu\rho\sigma} \equiv 0$$

A propos de l'asymétrie du tenseur $r_{,\rho\tau}$, mentionnons encore la formule:

$$(I\text{-}17) \qquad r_{,\rho\tau} - r_{,\tau\rho} \equiv \partial_{,\rho}f_{,\tau} - \partial_{,\tau}f_{,\rho}$$

où $f_{,\tau} \equiv f'^{\alpha}{}_{\tau\alpha}$.

4. La transformation de Lorentz et le groupe des formes.

En introduisant la matrice:

$$(I\text{-}18) \qquad (e_{\lambda\mu}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la forme quadratique fondamentale de la relativité restreinte peut s'écrire, en coordonnées orthogonales y^{λ}:

$$\dot{s}^2 \equiv e_{\lambda\mu}\dot{y}^\lambda\dot{y}^\mu \tag{I-19}$$

Les $e_{\lambda\mu}$ sont appelés symboles d'Eisenhart. On pose volontiers: $e_\lambda \equiv e_{\lambda\lambda}$. Soit maintenant la transformation de Lorentz:

$$y^\lambda \equiv \beta^\lambda + \beta^\lambda_\mu \bar{y}^\mu \tag{I-20}$$

$$\dot{y}^\lambda \equiv \beta^\lambda_\mu \dot{\bar{y}}^\mu \tag{I-20'}$$

L'invariance de la forme quadratique (I-19) conduit immédiatement aux relations suivantes:

$$e_{\rho\sigma} = \beta^\lambda_\rho \beta^\mu_\sigma e_{\lambda\mu} \tag{I-21}$$

Les éléments $\bar{\beta}^\lambda_\mu$ de la matrice inverse de (β^λ_μ) s'expriment ainsi:

$$\bar{\beta}^\lambda_\mu \equiv e^\lambda e_\mu \beta^\mu_\lambda \tag{I-22}$$

Nous sommes dès lors en mesure de développer une hypothèse importante de la TL.

Pour des expériences de courte durée, on peut assimiler le laboratoire à un référentiel d'inertie de coordonnées pseudo-orthogonales y^λ. Soient x^μ des coordonnées adaptées au système physique étudié (p. ex.: coordonnées polaires dans le cas d'un système à symétrie sphérique). On peut écrire:

$$\dot{y}^\lambda \equiv \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu \equiv \alpha^\lambda_\mu \dot{x}^\mu \tag{I-23}$$

Les relations (I-23) sont exactement de la même forme que (I-3). Cette analogie va nous permettre de jeter un

pont entre la TL et la TQ. En effet, si l'on substitue $g^{\lambda}{}'$ à $\dot{y}^{\lambda}$ dans l'expression (I-19) de $\dot{s}^2$, on obtient:

$$\dot{s}^2 \equiv e_{\lambda\mu}\dot{y}^{\lambda}\dot{y}^{\mu} \sim e_{\lambda\mu}g^{\lambda}{}'g^{\mu}{}' \equiv e_{\lambda\mu}g^{\lambda}{}'_{;\rho}g^{\mu}{}'_{;\sigma}\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\sigma}$$

En coordonnées curvilignes quelconques, $\dot{s}^2$ s'écrit:

(I-24) $$\dot{s}^2 \equiv g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\sigma}$$

En comparant (I-24) avec ce qui précède, on est conduit à procéder à l'identification suivante:

(I-25) $$G,_{\rho\sigma} \equiv e_{\lambda}g^{\lambda}{}'_{;\rho}g^{\lambda}{}'_{;\sigma}$$

où nous avons écrit $G,_{\rho\sigma}$ au lieu de $g_{\rho\sigma}$.

Considérons d'autre part un nouveau référentiel $(\bar{y}^{\mu})$ animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport au laboratoire. Les formules (I-20') sont alors applicables. En y effectuant la substitution $\dot{y}^{\lambda} \sim g^{\lambda}{}'$, il vient:

(I-26) $$g^{\lambda}{}' \equiv \beta^{\lambda}_{\mu}\bar{g}^{\mu}{}'$$

les $g^{\lambda}{}'_{;\mu}$ et les $\bar{g}^{\lambda}{}'_{;\mu}$ satisfaisant à des relations analogues. Nous voyons ainsi que les formes $g^{\lambda}{}'$ se comportent comme un vecteur contravariant par rapport aux transformations de Lorentz, ce que nous avions déjà mentionné au paragraphe (I,2).

L'identification $\dot{y}^{\lambda} \sim g^{\lambda}{}'$ constitue l'une des hypothèses fondamentales de la TL. Alors que dans la théorie classique, les $g_{\rho\sigma}$, symétriques, sont au nombre de 10, il y a 16 $g^{\lambda}{}'_{;\mu}$ dans la TL, ce qui permet de disposer de degrés de liberté supplémentaires.

5. Principe de moindre action et équations de champ.

Il est bien connu qu'en TQ, les équations de champ pour le vide s'obtiennent à partir du principe de variation:

$$\text{(I-27)} \qquad \delta \int R\sqrt{-G}\, dx = 0$$

où R désigne le scalaire de courbure, et G, le déterminant de la matrice des $g_{\rho\sigma}$, l'intégrale s'étendant naturellement au domaine considéré de l'espace-temps.

Dans ces conditions, la voie à suivre pour établir les équations de champ de la TL est toute tracée. Il suffira d'exprimer l'intégrande $R\sqrt{-G}$ de (I-27) en fonction des grandeurs caractéristiques de cette théorie (les $f^{\lambda}{}_{;\mu\nu}$ en particulier). Bien entendu, il s'agit là d'un travail purement algébrique, assez fastidieux, qui ne présente pas un très grand intérêt en soi. Nous nous bornerons donc à ne restituer que les très grandes lignes de ce développement.

Dans ce qui suit, les trois invariants ci-après joueront un rôle de premier plan:

$$\text{(I-28)} \qquad H_1 \equiv f^{\beta\gamma}{}_{;\alpha} f^{\alpha}{}_{;\beta\gamma}$$

$$\text{(I-28')} \qquad H_2 \equiv f^{\beta\alpha}{}_{;\gamma} f^{\gamma}{}_{;\alpha\beta}$$

$$\text{(I-28'')} \qquad H_3 \equiv f^{\alpha}{}_{;\alpha} f_{;\alpha}$$

Le calcul détaillé de R - r conduit au résultat:

$$\text{(I-29)} \qquad R - r \equiv 3\partial_\alpha f^\alpha + H_1 + H_2 + 4H_3$$

où, rappelons-le, $R \equiv R^{\alpha}{}_{;\alpha}$, $r \equiv r^{\alpha}{}_{;\alpha}$, et d'autre part, $\partial_\alpha \equiv g_{\alpha}{}^{\rho}\partial_{,\rho}$. On montre par ailleurs que $r \equiv \partial_\alpha f^\alpha + H_2$, si

bien que l'on obtient finalement:

$$R \equiv 4r + \underset{1}{H} - 2\underset{2}{H} + 4\underset{3}{H} \tag{I-30}$$

Des relations $G_{,\lambda\mu} \equiv e_{\alpha} g^{\alpha}{}_{;\lambda} g^{\alpha}{}_{;\mu}$, on déduit sans peine que $g^2 \equiv -G$, où $g \equiv$ dét $(g^{\lambda}{}_{;\mu})$. L'intégrale figurant dans la formule (I-27) pourra donc s'écrire:

$$\int R\sqrt{-G}\, dx \equiv \int Rg dx \equiv \int \mathscr{R} dx \tag{I-31}$$

en posant $\mathscr{R} \equiv Rg$. Rg est une densité scalaire. D'une manière plus générale, si $T'^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\pi\cdots}$ est un tenseur, nous obtiendrons une densité tensorielle $\mathscr{T}'^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\pi\cdots}$ en multipliant $T'^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\pi\cdots}$ par g:

$$\mathscr{T}'^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\pi\cdots} \equiv T'^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\pi\cdots} g \tag{I-32}$$

On montre sans grandes difficultés que $\mathscr{R} \equiv Rg$ contient une divergence de la forme $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(4gf'^{\alpha})$, dont le rôle est nul dans le principe de variation (I-27). Il suffit alors d'appliquer ledit principe à l'intégrale $\int \mathscr{H} dx$, où nous avons posé:

$$\mathscr{H} \equiv \underset{1}{\mathscr{H}} + 2\underset{2}{\mathscr{H}} - 4\underset{3}{\mathscr{H}} \tag{I-33}$$

avec $\mathscr{H} \equiv Hg$. $\mathscr{H}$ est la densité d'action qui va nous permettre d'obtenir les équations de champ. Ces dernières ne sont rien d'autre que les équations d'Euler-Lagrange tirées du principe de variation $\delta \int \mathscr{H} dx = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda}{}_{;\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)} \right\} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial g^{\lambda}{}_{;\mu}} = 0 \tag{I-34}$$

Il est bon de rappeler que $\mathscr{H}$ ne dépend que des $g^{\lambda}{}_{;\mu}$ et

des $\frac{\partial g^{\lambda}{}_{;\mu}}{\partial x^{\nu}}$, et non des $\frac{\partial^2 g^{\lambda}{}_{;\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\pi}}$. En revanche, $\mathcal{R}$ dépend également de ces dérivées secondes, mais seulement linéairement, caractéristique qui nous a permis d'écrire les équations de champ sous la forme simplifiée (I-34). Posons:

$$(I\text{-}35) \qquad \mathfrak{t}_{\lambda}{}^{;\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial g^{\lambda}{}_{;\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)} \qquad \mathfrak{T}_{\lambda}{}^{;\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g^{\lambda}{}_{;\mu}}$$

les équations du champ de gravitation dans le vide s'écriront:

$$(I\text{-}36) \qquad \boxed{\frac{\partial \mathfrak{t}_{\lambda}{}^{;\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} - \mathfrak{T}_{\lambda}{}^{;\mu} = 0}$$

Pour clore ce chapitre, nous mentionnerons encore une importante propriété du tenseur $f^{\lambda}{}_{;\mu\nu}$. On peut montrer que les relations:

$$(I\text{-}37) \qquad f^{\lambda}{}_{;\mu\nu} = 0$$

constituent une condition suffisante pour que l'on ait $\mathfrak{T}_{\lambda}{}^{;\mu} = 0$, c'est-à-dire pour que l'on ait affaire à l'univers de Lorentz ($\mathfrak{T}_{\lambda}{}^{;\mu}$ est en effet le tenseur d'énergie-impulsion). Dans ce cas, nous appellerons la matrice fondamentale ($g^{\lambda}{}_{;\mu}$) <u>matrice d'inertie</u> et nous la noterons ($t^{\lambda}{}_{;\mu}$). Cette remarque nous permettra de simplifier dans une grande mesure l'établissement des équations de champ en 1^{e} approximation dans le cas du vide (v. chapitre II).

Enfin, il convient de signaler que l'un des principaux succès de la TL est de rendre possible l'établissement de la célèbre formule $E = mc^2$, que seule la relativité restreinte avait permis d'obtenir à ce jour (v. {11}).

CHAPITRE II

LES EQUATIONS DE CHAMP EN PREMIERE APPROXIMATION

CAS GRAVITATIONNEL

1. Expression générale des équations de champ en première approximation pour le vide.

Nous avons vu au chapitre I que, dans l'univers de Lorentz, on a:

$$f^{\lambda};_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

Or, $f^{\lambda};_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{\lambda};_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g^{\lambda};_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$, ce qui signifie, dans notre cas:

$$\frac{\partial g^{\lambda};_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial g^{\lambda};_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad \text{(II-2)}$$

On déduit de là que les $g^{\lambda};_{\mu}$ peuvent se mettre sous la forme:

$$g^{\lambda};_{\mu} \equiv \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \qquad \text{(II-3)}$$

où les y^{λ} sont des fonctions des x^{μ}. Conformément à la terminologie introduite au chapitre I, ces $g^{\lambda};_{\mu}$ constituent une matrice d'inertie que nous noterons $t^{\lambda};_{\mu}$. Nous aurons donc:

$$g^{\lambda};_{\mu} \equiv t^{\lambda};_{\mu} \equiv \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \qquad \text{(II-4)}$$

$$g_{\lambda};^{\mu} \equiv t_{\lambda};^{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\lambda}} \qquad \text{(II-4')}$$

$$\gamma^{\lambda};_{\mu\nu} \equiv t^{\lambda};_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial t^{\lambda};_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial t^{\lambda};_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) \equiv \frac{\partial^2 y^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \qquad \text{(II-4'')}$$

Pour obtenir les équations de champ approchées, il s'est avéré très avantageux de mettre les $g^{\lambda};_{\mu}$ sous la forme:

(II-5) $$g^{\lambda};_{\mu} \equiv t^{\lambda};_{\alpha} h;^{\alpha}_{\mu}$$

Cette représentation des $g^{\lambda};_{\mu}$ appelle une remarque très importante. Dans la solution classique que la TQ donne du présent problème, on met les $g_{\mu\nu}$ sous la forme: $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, où $\eta_{\mu\nu} \equiv \pm\delta_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$ est une quantité du 1$^{\underline{er}}$ ordre. Cette manière d'écrire les $g_{\mu\nu}$, valable en coordonnées pseudo-orthogonales, a l'avantage de supprimer les produits du type $\Gamma\Gamma$ dans l'expression approchée de $R_{\mu\nu}$. En revanche, son défaut majeur est évidemment de ne pas être covariante. En raison du fait que, selon (II-5), les $g^{\lambda};_{\mu}$ s'expriment en fonction de la matrice d'inertie $t^{\lambda};_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{Y}^{\mu\lambda}}{\partial x^{\mu}}$, la covariance des équations de champ approchées que nous cherchons à établir est assurée ipso facto. Ces équations présentent ainsi un avantage substantiel par rapport aux équations correspondantes de la TQ, particularité que nous aurons l'occasion d'exploiter dans le présent travail en traitant directement les problèmes proposés dans les référentiels les plus adéquats (v. chapitres IV et suivants).

En multipliant (II-5) par $t_{\lambda};^{\nu}$, on trouve pour $h;^{\nu}_{\mu}$:

(II-6) $$h;^{\nu}_{\mu} \equiv t_{\alpha};^{\nu} g^{\alpha};_{\mu}$$

(II-7) $$h^{\nu}_{\mu} \equiv t^{\nu};_{\alpha} t_{\mu};^{\beta} h;^{\alpha}_{\beta}$$

Nous mettrons de même $g_{\lambda};^{\mu}$ sous la forme:

(II-8) $$g_{\lambda};^{\mu} \equiv t_{\lambda};^{\alpha} \bar{h};^{\mu}_{\alpha}$$

(II-9) $$\bar{h};^{\mu}_{\lambda} \equiv t^{\alpha};_{\lambda} g_{\alpha};^{\mu}$$

Les relations $g^{\lambda}{}_{;\mu} g_{\lambda}{}^{;\nu} \equiv \delta^{\nu}_{\mu}$ permettent d'établir que:

$$h^{\alpha}{}_{\mu;} \bar{h}^{\nu}{}_{;\alpha} \equiv \delta^{\nu}_{\mu} \qquad \text{(II-10)}$$

En 1$^{\underline{e}}$ approximation, on peut écrire: $g^{\lambda}{}_{;\mu} \simeq t^{\lambda}{}_{;\mu} + \delta g^{\lambda}{}_{;\mu}$. Les $\delta g^{\lambda}{}_{;\mu}$ se calculent à l'aide de (II-5), et l'on trouve:

$$\delta g^{\lambda}{}_{;\mu} \equiv t^{\lambda}{}_{;\alpha} \delta h^{\alpha}{}_{;\mu} \qquad \text{(II-11)}$$

A propos de ces expressions, il est important de remarquer que $\delta t^{\lambda}{}_{;\mu} \equiv 0$. En effet, l'opérateur δ correspond au passage du vide absolu (univers de Lorentz) au champ faible. Or, l'univers de Lorentz est décrit par les $t^{\lambda}{}_{;\mu}$, qui ne sont pas modifiés lors de ce passage, contrairement aux $g^{\lambda}{}_{;\mu}$. Nous aurons aussi:

$$\delta g_{\lambda}{}^{;\mu} \equiv t_{\lambda}{}^{;\alpha} \delta \bar{h}^{\mu}{}_{;\alpha} \qquad \text{(II-12)}$$

Nous tirons de (II-10):

$$\delta \bar{h}^{\mu}{}_{;\lambda} \equiv -\bar{h}^{\alpha}{}_{;\lambda} \bar{h}^{\mu}{}_{;\beta} \delta h^{\beta}{}_{;\alpha} \qquad \text{(II-13)}$$

Afin de simplifier un peu l'écriture, nous poserons: $\delta h^{\lambda}{}_{;\mu} \equiv q^{\lambda}{}_{;\mu}$ (du 1$^{\underline{er}}$ ordre). (II-13) permet d'établir que dans l'approximation considérée, on a:

$$\delta \bar{h}^{\mu}{}_{;\lambda} \equiv -q^{\mu}{}_{;\lambda} \qquad \text{(II-14)}$$

ce qui nous donne pour les δg:

$$\delta g^{\lambda}{}_{;\mu} \equiv t^{\lambda}{}_{;\alpha} q^{\alpha}{}_{;\mu} \qquad \text{(II-15)}$$

$$\delta g_{\lambda}{}^{;\mu} \equiv -t_{\lambda}{}^{;\alpha} q^{\mu}{}_{;\alpha} \qquad \text{(II-15')}$$

Cela posé, il n'est pas difficile de montrer que l'on a:

$$\delta G,_{\rho\sigma} \equiv q,_{\rho\sigma} + q,_{\sigma\rho} \tag{II-16}$$

$$\delta G'^{\rho\sigma} \equiv -(q'^{\rho\sigma} + q'^{\sigma\rho}) \tag{II-16'}$$

soit, en décomposant $q,_{\rho\sigma}$ en sa partie symétrique $u,_{\rho\sigma}$ et sa partie antisymétrique $v,_{\rho\sigma}$ ($q,_{\rho\sigma} \equiv u,_{\rho\sigma} + v,_{\rho\sigma}$):

$$\delta G,_{\rho\sigma} \equiv 2u,_{\rho\sigma} \tag{II-17}$$

$$\delta G'^{\rho\sigma} \equiv -2u'^{\rho\sigma} \tag{II-17'}$$

Rappelons que l'on a:

$$q'^{\rho\sigma} \equiv L'^{\rho\alpha}L'^{\sigma\beta}q,_{\alpha\beta} \tag{II-18}$$

où $(L'^{\rho\sigma})$ désigne le tenseur métrique dans le vide absolu (métrique de Lorentz).

Dans ce qui suit, $D,_{\nu}$ est l'opérateur de dérivation covariante en rapport avec les $g^{\lambda}_{;\mu}$ $(G,_{\rho\sigma})$, soit dans le cas général, alors que $\partial,_{\nu}$ se rapporte aux $t^{\lambda}_{;\mu}$ $(L,_{\rho\sigma})$, soit au cas du vide. Dans ces conditions, et à l'approximation considérée, on établit sans peine trois propriétés qui permettent de simplifier considérablement les développements ultérieurs, à savoir:

$$D,_{\nu}\delta T^{\lambda}_{;\mu} \equiv \partial,_{\nu}\delta T^{\lambda}_{;\mu} \tag{II-19}$$

$$D,_{\rho}D,_{\sigma} - D,_{\sigma}D,_{\rho} \equiv \partial,_{\rho}\partial,_{\sigma} - \partial,_{\sigma}\partial,_{\rho} \equiv 0 \tag{II-20}$$

$$D,_{\rho}G,_{\lambda\mu} \equiv 0 \tag{II-21}$$

Il est enfin très utile de calculer les δ des grandeurs fondamentales $f;^{\lambda}_{\mu\nu}$ et $\gamma;^{\lambda}_{\mu\nu}$. On obtient:

$$\delta f;^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\partial,_{\mu} q;^{\lambda}_{\nu} - \partial,_{\nu} q;^{\lambda}_{\mu}) \tag{II-22}$$

$$\delta \gamma;^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\partial,_{\mu} q;^{\lambda}_{\nu} + \partial,_{\nu} q;^{\lambda}_{\mu}) \tag{II-22'}$$

d'où il suit que:

$$\delta f,_{\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\partial,_{\lambda} q - \partial,_{\alpha} q;^{\alpha}_{\lambda}) \tag{II-23}$$

$$\delta \gamma,_{\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\partial,_{\lambda} q + \partial,_{\alpha} q;^{\alpha}_{\lambda}) \tag{II-23'}$$

où l'on a posé: $q \equiv q;^{\alpha}_{\alpha} \equiv u;^{\alpha}_{\alpha} \equiv u$.

Appelant W (au lieu de H, comme dans le chapitre I) la fonction d'action, nous aurons maintenant recours aux formules (I-35). Posant:

$$t_{i}{}_{\lambda};^{\mu} \equiv \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_{i\lambda};^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \tag{II-24}$$

$$T_{i}{}_{\lambda};^{\mu} \equiv \frac{1}{g} \mathcal{T}_{i}{}_{\lambda};^{\mu} \tag{II-24'}$$

$$W_{i}{}_{\lambda};^{\mu} \equiv t_{i}{}_{\lambda};^{\mu} - T_{i}{}_{\lambda};^{\mu} \tag{II-24''}$$

et utilisant les formules (I-28) pour les H_i, nous parvenons, après des calculs assez longs, au tableau suivant:

$$\begin{aligned} W_{1},_{\rho\sigma} \equiv\ & 2D,_{\alpha} f;^{\alpha}_{\rho}{}_{\sigma} + 2f,_{\alpha} f;^{\alpha}_{\rho}{}_{\sigma} - 2f;_{\rho\alpha\beta} f;^{\alpha\beta}_{\sigma} \\ & + 2f;_{\rho\alpha\beta} f;^{\alpha\beta}_{\sigma} + 2f;_{\alpha\beta\rho} f;^{\alpha\beta}_{\sigma} - G,_{\rho\sigma} H_{1} \end{aligned} \tag{II-25}$$

$$\begin{aligned} W_{2},_{\rho\sigma} \equiv\ & (D,_{\alpha} + f,_{\alpha})(f;^{\alpha}_{\sigma}{}_{\rho} + f;^{\alpha}_{\rho\sigma}) + f;_{\alpha\beta\rho} f;^{\alpha\beta}_{\sigma} \\ & - f;_{\alpha\beta\rho} f;^{\alpha\beta}_{\sigma} + 2f;_{\alpha\beta\rho} f;^{\beta\alpha}_{\sigma} - G,_{\rho\sigma} H_{2} \end{aligned} \tag{II-25'}$$

$$(II\text{-}25'') \quad \underset{3}{W}_{,\rho\sigma} \equiv - D_{,\rho} f_{,\sigma} + G_{,\rho\sigma} D_{,\alpha} f'^{\alpha} + f_{,\alpha} f'^{\alpha}_{;\rho\sigma}$$

En appliquant notamment les propriétés (II-19), (II-20) et (II-21), on obtient pour les $\underset{i}{\delta W}_{,\rho\sigma}$:

$$(II\text{-}26) \quad \underset{1}{\delta W}_{,\rho\sigma} \equiv \partial_{,\alpha} \partial'^{\alpha} q_{,\rho\sigma} - \partial_{,\sigma} \partial'^{\alpha} q_{,\rho\alpha}$$

$$(II\text{-}26') \quad \underset{2}{\delta W}_{,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\partial_{,\alpha} \partial'^{\alpha} q_{,\sigma\rho} - \partial_{,\sigma} \partial'^{\alpha} q_{,\alpha\rho}) + \frac{1}{2} \partial_{,\rho} \partial'^{\alpha} (q_{,\alpha\sigma} - q_{,\sigma\alpha})$$

$$(II\text{-}26'') \quad \underset{3}{\delta W}_{,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\partial_{,\rho} \partial'^{\alpha} q_{,\alpha\sigma} - \partial_{,\rho} \partial_{,\sigma} q) + \frac{1}{2} L_{,\rho\sigma} (\partial_{,\alpha} \partial'^{\alpha} q - \partial'^{\alpha} \partial'^{\beta} q_{,\alpha\beta})$$

avec la définition: $\partial'^{\alpha} \equiv L'^{\alpha\beta} \partial_{,\beta}$. Dans le cas gravitationnel, qui nous intéresse ici, nous devons prendre pour H la combinaison linéaire (I-33), ou, ce qui revient au même:

$$(II\text{-}27) \quad \underset{I}{H} \equiv \frac{1}{2} \underset{1}{H} + \underset{2}{H} - 2 \underset{3}{H}$$

Les équations du champ gravitationnel faible dans le vide s'écriront donc: $\underset{I}{\delta W}_{,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2} \underset{1}{\delta W}_{,\rho\sigma} + \underset{2}{\delta W}_{,\rho\sigma} - 2 \underset{3}{\delta W}_{,\rho\sigma} = 0$, soit:

$$(II\text{-}28) \quad \boxed{\Box u_{,\rho\sigma} + \partial_{,\rho} \partial_{,\sigma} u - (\partial_{,\rho} u_{,\sigma} + \partial_{,\sigma} u_{,\rho}) - L_{,\rho\sigma} (\Box u - w) = 0}$$

où:

$$(II\text{-}29) \quad \Box \equiv L'^{\alpha\beta} \partial_{,\alpha} \partial_{,\beta} \equiv \partial'^{\alpha} \partial_{,\alpha}$$

$$(II\text{-}30) \quad q_{,\rho\sigma} \equiv u_{,\rho\sigma} + v_{,\rho\sigma} \qquad q_{,\sigma\rho} \equiv u_{,\rho\sigma} - v_{,\rho\sigma}$$

(II-31) $$u \equiv u'^{\alpha}_{\ \alpha}$$

(II-32) $$u_{,\rho} \equiv \partial'^{\alpha} u_{,\rho\alpha}$$

(II-33) $$w \equiv \partial'^{\alpha} u_{,\alpha} \equiv \partial'^{\alpha}\partial'^{\beta} u_{,\alpha\beta}$$

En contractant les équations (II-28) avec $L'^{\rho\sigma}$, on montre aisément que leur dernier terme est identiquement nul dans le vide (et seulement dans ce cas). Cette remarque permet de récrire les équations (II-28) sous leur forme définitive:

(II-34) $$\boxed{\Box u_{,\rho\sigma} + \partial_{,\rho}\partial_{,\sigma} u - (\partial_{,\rho} u_{,\sigma} + \partial_{,\sigma} u_{,\rho}) = 0}$$

Ce sont, rappelons-le, les équations du champ gravitationnel faible dans le vide (1^{e} approximation). Symétriques par rapport aux indices ρ et σ, elles sont au nombre de 10, et doivent permettre de calculer les 10 inconnues $u_{,\rho\sigma}$ ($\delta G_{,\rho\sigma} \equiv 2u_{,\rho\sigma}$). Il va cependant de soi que sous leur forme (II-34), ces équations ne sont guère utilisables immédiatement, par exemple dans le cas d'un référentiel curviligne (coordonnées polaires) tel que nous l'emploierons au chapitre IV (solution approchée de Schwarzschild). Il est nécessaire pour cela d'écrire les équations (II-34) sous une forme plus détaillée, et c'est à cette explicitation que nous consacrerons le paragraphe 2 de ce chapitre.

2. Expression détaillée des équations de champ approchées.

Le passage des équations (II-34) à leur forme explicite nécessite un développement de nature purement algébrique, qui ne présente pas un très grand intérêt intrinsèque. C'est pourquoi nous renoncerons à faire état de toutes les subtilités de ces calculs, nous contentant de donner le

résultat final auquel ils aboutissent. En ordonnant ces équations selon les termes en $\frac{\partial^2 u,_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$, $\frac{\partial u,_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha}$, respectivement en $u,_{\rho\sigma}$, on obtient:

(II-35)
$$
\begin{aligned}
L'^{\alpha\beta}\Big\{&\Big(\frac{\partial^2 u,_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 u,_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 u,_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 u,_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho \partial x^\beta}\Big) \\
&- t;^{\nu}_{\rho\sigma}\Big(\frac{\partial u,_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - 2\frac{\partial u,_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}\Big) \\
&+ t;^{\nu}_{\rho\alpha}\Big(\frac{\partial u,_{\sigma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial u,_{\sigma\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u,_{\beta\nu}}{\partial x^\sigma}\Big) \\
&+ t;^{\nu}_{\sigma\alpha}\Big(\frac{\partial u,_{\rho\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial u,_{\rho\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u,_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}\Big) \\
&- t;^{\nu}_{\alpha\beta}\Big(\frac{\partial u,_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial u,_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial u,_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho}\Big) \\
&+ 2N;^{\mu\nu}_{\rho\sigma\alpha\beta} u,_{\mu\nu}\Big\} = 0
\end{aligned}
$$

Dans ces relations, les $t;^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont les $\gamma;^{\lambda}_{\mu\nu}$ relatifs à l'univers de Lorentz: $t;^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv t_\alpha;^{\lambda} t^\alpha;_{\mu\nu} \equiv t_\alpha;^{\lambda} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$. Quant aux symboles $N;^{\mu\nu}_{\rho\sigma\alpha\beta}$, ils sont définis ainsi:

(II-36)
$$N;^{\mu\nu}_{\rho\sigma\alpha\beta} \equiv t;^{\mu}_{\rho\alpha} t;^{\nu}_{\sigma\beta} - t;^{\mu}_{\rho\sigma} t;^{\nu}_{\alpha\beta}$$

Dans les deux prochains chapitres, c'est sous leur forme (II-35) que nous appliquerons les équations de champ. Comme on le voit immédiatement, pour mettre en oeuvre ces équations, il suffit de choisir un référentiel (x^μ) bien adapté à la nature du problème traité. La connaissance des $t^\lambda;_\mu \equiv \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu}$ permet alors de calculer tous les coefficients de (II-35). Quand nous traiterons le cas intérieur, il faudra bien entendu compléter ces équations de manière appropriée.

CHAPITRE III

ONDES GRAVITATIONNELLES PLANES. ENERGIE ET IMPULSION

1. Ondes gravitationnelles planes.

Le problème classique des ondes gravitationnelles planes de faible amplitude constitue un excellent exemple d'application des équations (II-28). Rappelons que, dans ce problème, on suppose que les potentiels gravitationnels ne dépendent que des seules variables $x^0 \equiv ct$ et x^1:

$$u_{,\rho\sigma} \equiv u_{,\rho\sigma}(x^0, x^1) \tag{III-1}$$

ce qui correspond à un vecteur d'onde parallèle à l'axe des x^1. Le tenseur matériel étant nul dans ce cas (on étudie la propagation des ondes dans le vide), nous aurons $\Box u = w$, et les équations de champ se réduisent ainsi à la forme:

$$\Box u_{,\rho\sigma} + \partial_{,\rho}\partial_{,\sigma}u - (\partial_{,\rho}u_{,\sigma} + \partial_{,\sigma}u_{,\rho}) = 0 \tag{III-2}$$

L'espace-temps vide étant initialement rapporté à un repère orthonormé (y^0, y^1, y^2, y^3), il n'y a aucune raison de changer effectivement de coordonnées, si bien que les $t^{\lambda}_{;\mu} \equiv \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}$ ne sont rien d'autre que les symboles de Kronecker δ^{λ}_{μ}. Il en résulte que les $t^{\lambda}_{;\mu\nu}$ sont tous identiquement nuls, et les équations de champ s'en trouvent considérablement simplifiées, car les dérivées covariantes sont alors identiques aux dérivées ordinaires correspondantes. On trouve sans difficultés (pour simplifier l'écriture, posons $y^0 \equiv x$, $y^1 = y$):

(III-3)

$$(0,0): \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{,11} + u_{,22} + u_{,33}) + \frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_{,01}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(0,1): \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(u_{,22} + u_{,33}) = 0$$

$$(0,2): \frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_{,12}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(0,3): \frac{\partial^2 u_{,03}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_{,13}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(1,1): \frac{\partial^2 u_{,11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_{,00} - u_{,22} - u_{,33}) - 2\frac{\partial^2 u_{,01}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(1,2): \frac{\partial^2 u_{,12}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(1,3): \frac{\partial^2 u_{,13}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{,03}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(2,2): \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_{,22} = 0 \quad \text{ou} \quad \Box u_{,22} = 0$$

$$(2,3): \Box u_{,23} = 0$$

$$(3,3): \Box u_{,33} = 0$$

Nous voyons ainsi que les potentiels $u_{,22}$, $u_{,23}$ et $u_{,33}$ satisfont à des équations d'ondes de la forme $\Box u_{,\rho\sigma} = 0$. Ces ondes planes se déplacent à la vitesse de la lumière dans la direction de l'axe des x^1. En admettant par exemple que seule la composante $u_{,23}$ oscille (hypothèse que nous reprendrons plus loin dans le problème de l'énergie), le tenseur métrique devient alors:

(III-4)
$$(G_{,\rho\sigma}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2u_{,23} \\ 0 & 0 & 2u_{,23} & -1 \end{pmatrix}$$

résultat parfaitement conforme à ce que l'on obtient à l'aide de la théorie einsténienne (v. par exemple {15}, p. 209).

2. Energie et impulsion.

Il s'agit de calculer la densité de l'énergie transportée par les ondes du paragraphe 1. En théorie des champs, il est bien connu que cette densité est donnée par la composante (0,0) du tenseur d'énergie-impulsion:

$$(III\text{-}5) \qquad T_{00} \equiv \frac{1}{2}{}_1T_{00} + {}_2T_{00} - 2{}_3T_{00}$$

où $T_{\lambda}{}^{;\mu} \equiv \frac{1}{g}\mathcal{T}_{\lambda}{}^{;\mu}$ (v. (I-35)). La mise en oeuvre des relations (I-35) conduit aux résultats suivants:

$$(III\text{-}6) \qquad {}_1T_{\lambda\mu} \equiv -4f_{\alpha\lambda\beta}f^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta} + e_{\lambda\mu}{}_1H$$

$$(III\text{-}6') \qquad {}_2T_{\lambda\mu} \equiv -2f^{\alpha}{}_{\lambda\beta}f^{\beta}{}_{\mu\alpha} - 2f_{\alpha\lambda\beta}f_{\mu}{}^{\alpha\beta} + e_{\lambda\mu}{}_2H$$

$$(III\text{-}6'') \qquad {}_3T_{\lambda\mu} \equiv -2f_{\alpha}f_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda} - 2f_{\lambda}f_{\mu} + e_{\lambda\mu}{}_3H$$

Afin de simplifier les calculs au maximum, nous supposerons que seule la composante $G_{,23}$ du tenseur métrique oscille (v. paragraphe 1). Il faut relever en outre que la formule (III-5) devrait s'écrire, d'une manière plus précise, $\delta^2T_{00} \equiv \ldots$, puisque nous traitons le problème en 1$^{\underline{e}}$ approximation (T_{00} est une forme quadratique des f). Les f sont alors à remplacer par les δf correspondants.

Les seuls $\delta f_{,\alpha\beta\gamma}$ non identiquement nuls sont indiqués dans le tableau suivant:

(III-7)

$$\delta f_{,203} \equiv -\delta f_{,230} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^0} \qquad \delta f_{,213} \equiv -\delta f_{,231} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^1}$$

$$\delta f_{,302} \equiv -\delta f_{,320} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^0} \qquad \delta f_{,312} \equiv -\delta f_{,321} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^1}$$

A l'aide de ces expressions, on calcule aisément les T_{i00}:

(III-8) $$T_{100} \equiv -4\left[(\delta f_{,203})^2 + (\delta f_{,213})^2\right]$$

(III-8') $$T_{200} \equiv -2\left[(\delta f_{,203})^2 + (\delta f_{,213})^2\right]$$

(III-8'') $$T_{300} \equiv 0$$

La formule (III-5) fournit enfin:

(III-9) $$T_{00} \equiv -4\left[(\delta f_{,203})^2 + (\delta f_{,213})^2\right]$$

ou encore:

(III-9') $$\boxed{T_{00} \equiv -\left[\left(\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^1}\right)^2\right]}$$

On voit ainsi que la densité d'énergie est définie négative ($g \equiv 1$).

Les composantes du vecteur spatial d'impulsion sont les T_{i0} ($i = 1, 2, 3$). Tandis que T_{20} et T_{30} sont identiquement nuls dans notre cas, on obtient pour T_{10}, moyennant quelques calculs élémentaires:

(III-10) $$\boxed{T_{10} \equiv -2\left(\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial u_{,23}}{\partial x^1}\right)}$$

Considérons l'exemple des oscillations harmoniques:

$u_{,23} \equiv A \sin k(x^0 - x^1)$. La formule (III-10) montre que l'impulsion T_{10} est positive, ce qui correspond à une progression des ondes dans la direction positive de l'axe des x^1, comme il se doit. En revanche, selon (III-9'), le champ d'ondes est porteur d'une énergie définie négative, ce qui revient à affirmer que l'énergie de l'émetteur augmente lorsque ce dernier produit ces oscillations. Nous sommes en présence d'un fait absolument étrange, dont le problème de l'interprétation correcte demeure entier. Il sied en outre de relever que ce résultat remarquable n'avait pas été prévu par la TQ, ce qui nous autorise à le considérer comme l'une des conséquences importantes de la TL.

Remarque. En fait, l'énergie est donnée par l'expression χT_{00}, et l'on pourrait être tenté de prendre $\chi < 0$, afin d'obtenir une énergie positive. Les quantités χT_{i0} représentant alors l'impulsion, celle-ci serait négative dans l'exemple des oscillations harmoniques traité ci-dessus, et la difficulté subsiste.

A ce propos, il convient de remarquer que seule la TL permet de décider, le cas échéant avec l'aide de l'expérience, si l'énergie de gravitation et l'énergie électromagnétique sont de même signe, ou au contraire, de signes opposés (v. là-dessus {12} et {46}).

CHAPITRE IV

CHAMP GRAVITATIONNEL A SYMETRIE SPHERIQUE

1. Potentiels de gravitation.

Les équations (II-35) permettent de résoudre élégamment, en première approximation, le problème classique du champ gravitationnel à symétrie sphérique (Schwarzschild). Dans ce cas, l'usage des coordonnées polaires s'impose tout naturellement:

$$
\text{(IV-1)} \qquad
\begin{aligned}
y^0 &\equiv ct \equiv x^0 \\
y^1 &\equiv r \sin\theta \cos\psi \\
y^2 &\equiv r \sin\theta \sin\psi \\
y^3 &\equiv r \cos\theta
\end{aligned}
$$

où $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \psi$, les y^i désignant les coordonnées orthogonales auxquelles on rapporte l'espace vide. La matrice d'inertie $(t^\lambda{}_{;\mu})$ se déduit aisément des formules $t^\lambda{}_{;\mu} \equiv \dfrac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu}$:

(IV-2)

$$
(t^\lambda{}_{;\mu}) \equiv \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sin\theta\cos\psi & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\sin\psi \\
0 & \sin\theta\sin\psi & r\cos\theta\sin\psi & r\sin\theta\cos\psi \\
0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0
\end{bmatrix}
$$

Le calcul de la matrice transverse (inverse transposée) $(t_\lambda{}^{;\mu})$ conduit au résultat suivant:

(IV-3)

$$(t_{\lambda}{}^{;\mu}) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\psi & \dfrac{\cos\theta\cos\psi}{r} & -\dfrac{\sin\psi}{r\sin\theta} \\ 0 & \sin\theta\sin\psi & \dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r} & \dfrac{\cos\psi}{r\sin\theta} \\ 0 & \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices (IV-2) et (IV-3) permettent de calculer sans peine les $t^{\lambda};_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial t^{\lambda};}{\partial x^{\nu}}{}_{\mu}$ et les $t;^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv g_{\alpha};^{\lambda} t^{\alpha};_{\mu\nu} \simeq t_{\alpha};^{\lambda} t^{\alpha};_{\mu\nu}$. Les seuls $t;^{\lambda}{}_{\mu\nu}\partial x$ non identiquement nuls sont:

(IV-4)

$$t;^{1}{}_{22} \equiv -r \qquad t;^{2}{}_{12} \equiv \frac{1}{r} \qquad t;^{3}{}_{13} \equiv \frac{1}{r}$$
$$t;^{1}{}_{33} \equiv -r\sin^2\theta \qquad t;^{2}{}_{33} \equiv -\sin\theta\cos\theta \qquad t;^{3}{}_{23} \equiv \operatorname{cotg}\theta$$

Rappelons encore le tenseur métrique d'inertie:

(IV-5) $$(L,_{\rho\sigma}) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

(IV-5') $$(L'^{\rho\sigma}) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

Il est dès lors possible d'établir les équations de champ. Conformément à la solution bien connue de Schwarzschild, nous supposerons que seuls les potentiels $G,_{00}$ et $G,_{11}$ seront modifiés par la présence d'une source à symétrie sphérique. D'autre part, afin de confirmer si possi-

ble par la même occasion le théorème de Birkhoff (caractère obligatoirement statique de tout champ gravitationnel à symétrie sphérique), nous supposerons que $u_{,00}$ et $u_{,11}$ sont des fonctions de $x^0 \equiv ct$ et de $x^1 \equiv r$. Pour simplifier un peu l'écriture, posons $x^0 \equiv x$:

(IV-6)
$$u_{,00} \equiv f(x,r)$$
$$u_{,11} \equiv g(x,r)$$

La mise en oeuvre des équations de champ (II-35) conduit aux résultats suivants:

(IV-7)
$$(0,0): \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$$
$$(0,1): \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$
$$(1,1): \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = 0$$
$$(2,2): \quad \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{2}{r}g = 0$$

L'équation (3,3) est identique à l'équation (2,2). Quant aux autres équations (ρ,σ), elles se réduisent à des identités.

L'équation (0,1) montre que g ne dépend pas du temps: $g \equiv g(r)$. Il en résulte (équation (2,2)) que $\frac{\partial f}{\partial r}$ ne dépend que de r: $\frac{\partial f}{\partial r} \equiv F(r)$, d'où il suit que:

(IV-8)
$$f(x,r) \equiv h(r) + k(x)$$

où h(r) et k(x) sont des fonctions à déterminer. En introduisant cette forme de f dans l'équation (0,0), on obtient: $h'' + \frac{2}{r}h' = 0$, équation dont la solution générale est $h(r) \equiv \frac{A}{r} + B$. L'équation (1,1) se réduit alors à $g' = -\frac{A}{r^2}$,

qui donne: $g \equiv \frac{A}{r} + C$, solution compatible avec (2,2) pour autant que C soit nul: $g \equiv \frac{A}{r}$. La solution générale de notre problème se présente donc ainsi:

(IV-9)
$$f \equiv u_{,00} \equiv \frac{A}{r} + B + k(x)$$
$$g \equiv u_{,11} \equiv \frac{A}{r}$$

ce qui conduit aux potentiels (en 1^{e} approximation):

(IV-10)
$$G_{,00} \simeq 1 + \frac{2A}{r} + 2B + 2k(x)$$
$$G_{,11} \simeq -1 + \frac{2A}{r}$$

Ces expressions approchées de $G_{,00}$ et de $G_{,11}$ sont conformes à la solution exacte. La comparaison de cette dernière avec (IV-10) montre que l'on doit poser: $A \equiv -\frac{Gm}{c^2}$ et $B \equiv 0$ ($G \equiv$ constante de gravitation, $m \equiv$ masse totale de la source du champ). On voit d'autre part que les conditions à l'infini exigent: $k(x) \equiv 0$. La solution s'écrit donc finalement comme suit:

(IV-11)
$$\boxed{G_{,00} \simeq 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \qquad G_{,11} \simeq -1 - \frac{2Gm}{c^2 r}}$$

Ainsi, notre solution est entièrement indépendante du temps, en accord avec le théorème de Birkhoff.

2. Energie.

Selon la TL, l'énergie totale exacte s'exprime par l'intégrale:

(IV-12)
$$E \equiv \frac{4\pi}{\kappa} \int_{2a}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{2a}{r}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2a}{r}}} - 1 \right]^2 dr$$

où $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ et $a \equiv \frac{Gm}{c^2}$. On retrouve la célèbre formule d'Einstein, $E = mc^2$. Posant $x \equiv \frac{2a}{r}$, on peut développer l'inté-

grande en une série de puissances de x, qui converge dans l'intervalle d'intégration (0,1), mais diverge en x = 1. Or, la théorie de l'intégration de telles séries nous permet, du moins en principe, de trouver E(r) par ce moyen, et ensuite E(2a) ≡ E. Cependant, il est clair qu'un tel procédé n'a pas sa raison d'être, puisqu'il est facile d'évaluer rigoureusement l'intégrale (IV-12). A noter toutefois que nous avons vérifié explicitement le bien-fondé de la méthode à propos du premier terme dudit développement, et que le résultat trouvé concorde avec la solution exacte.

CHAPITRE V

CHAMP GRAVITATIONNEL A SYMETRIE CYLINDRIQUE

Dans ce chapitre, nous nous proposons de développer l'application des équations de champ approchées (II-35) au cas où les potentiels de gravitation ne dépendent que de la coordonnée cylindrique r. Bien que ce problème ne présente pas en soi un intérêt très élevé, les résultats qui suivent, aussi bien dans le cas extérieur que dans le cas intérieur, nous seront utiles pour traiter le problème du disque tournant (v. chapitre VII).

1. Cas extérieur.

Weyl ({16}, p. 266) a donné de ce problème la solution générale suivante:

$$(V\text{-}1) \qquad ds^2 \equiv e^{\frac{2\phi}{c^2}}(dx^0)^2 - h(dr^2 + dz^2) - \frac{r^2 d\psi^2}{e^{\frac{2\phi}{c^2}}}$$

où ϕ est le potentiel newtonien des sources du champ. r, ψ et z désignant les coordonnées cylindriques habituelles, ϕ et h seront des fonctions de r et de z seulement. Dans ce qui suit, nous nous bornerons à considérer le cas où les potentiels de gravitation ne dépendent que de r. Il n'est alors pas difficile de résoudre les équations classiques d'Einstein: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$. En effet, si l'on suppose que la densité par unité de longueur ρ (dans le sens des z) est constante, le potentiel $\phi(r)$ s'écrit:

$$(V\text{-}2) \qquad \phi(r) \equiv 2G\rho \ln r$$

ce qui donne pour g_{00}:

$$(V\text{-}3) \qquad g_{00} \equiv r^{\frac{4G\rho}{c^2}} \equiv r^{M}$$

où $M \equiv \frac{4G\rho}{c^2}$. Enfin, la connaissance de g_{00} permet de calculer $h(r)$. On trouve:

$$(V\text{-}4) \qquad ds^2 \equiv r^M (dx^0)^2 - r^{M(\frac{M}{2} - 1)} (dr^2 + dz^2) - \frac{r^2 d\psi^2}{r^M}$$

Comme la solution exacte (V-4) est aisée à obtenir, nous renoncerons à traiter le problème en 1^{e} approximation. En revanche, il est plus difficile de trouver la solution exacte dans le cas intérieur (fluide incompressible parfait, par exemple). C'est ce cas que nous nous proposons de traiter en 1^{e} approximation au paragraphe suivant.

2. Cas intérieur: fluide incompressible parfait.

Pour traiter ce problème dans le formalisme classique de la TQ, il faut résoudre le système:

$$(V\text{-}5) \qquad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur matériel et χ, une constante convenablement choisie. En posant $S_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, les équations en 1^{e} approximation s'écriront:

$$(V\text{-}6) \qquad \delta S_{\mu\nu} = \chi \delta T_{\mu\nu}$$

Or, des calculs simples, bien qu'un peu fastidieux, permettent de montrer que les membres de gauche des équations (II-34) de la TL ne sont rien d'autre que les $\delta S_{\rho\sigma}$ des équations (V-6) ci-dessus, à un terme près cependant:
$- L_{,\rho\sigma} (\Box u - w)$ (en effet: ce terme est nul dans le cas extérieur, mais pas dans le cas intérieur). Nous aurons donc:

$$(V\text{-}7) \qquad \Box u_{,\rho\sigma} + \partial_{,\rho}\partial_{,\sigma}u - (\partial_{,\rho}u_{,\sigma} + \partial_{,\sigma}u_{,\rho}) - L_{,\rho\sigma}(\Box u - w) = \chi\delta T_{,\rho\sigma}$$

L'évaluation de $(\Box u - w)$ peut s'effectuer à deux points de vue différents. En contractant les équations (V-7) avec $L'^{\rho\sigma}$, on obtient:

$$\Box u + \Box u - 2w - 4(\Box u - w) = \chi\delta T$$

soit:

$$(V\text{-}8) \qquad (\Box u - w) = -\frac{\chi}{2}\delta T$$

avec $T \equiv T;^{\alpha}{}_{\alpha}$. D'autre part, il est clair qu'on peut exprimer $(\Box u - w)$ directement en fonction des $u_{,\rho\sigma}$ et de leurs dérivées. Les calculs détaillés conduisent à la relation:

$$(V\text{-}9) \qquad (\Box u - w) \equiv -\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} + \frac{2}{r^4}u_{,22} + \frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r}$$

Passons aux $\delta T_{,\rho\sigma}$. Nous commencerons par écrire l'expression complète de $T_{,\rho\sigma}$, et nous préciserons plus tard la valeur exacte de la constante χ:

$$(V\text{-}10) \qquad T_{,\rho\sigma} \equiv G_{,\rho\alpha}G_{,\sigma\beta}T'^{\alpha\beta}$$

avec

$$(V\text{-}10') \qquad T'^{\alpha\beta} \equiv (\rho c^2 + p)\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} - G'^{\alpha\beta}p$$

où ρ désigne la densité (que nous supposerons constante) et p, la pression (fonction de r à déterminer). En se rap-

pelant que, dans notre cas (champ faible), ρ et p sont des petites quantités du 1er ordre, on montre sans difficultés que les $\delta T,_{\rho\sigma}$ sont donnés par les formules:

$$(V\text{-}11) \quad \delta T,_{\rho\sigma} \equiv (\rho c^2 + p) L,_{\rho\alpha} L,_{\sigma\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - L,_{\rho\sigma} p$$

Le calcul effectif des $\delta T,_{\rho\sigma}$ nécessite la connaissance de la matrice $(L,_{\rho\sigma})$:

$$(V\text{-}12) \quad (L,_{\rho\sigma}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (L'^{\rho\sigma}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matière étant au repos, seule la composante $\frac{dx^0}{ds}$ de la quadrivitesse est différente de 0: $(\frac{dx^0}{ds})^2 \equiv \frac{1}{L,_{00}} \equiv L'^{00} \equiv 1$. On obtient aisément:

$$(V\text{-}13) \quad \delta T,_{00} \equiv \rho c^2 \quad \delta T,_{11} \equiv \delta T,_{33} \equiv p \quad \delta T,_{22} \equiv r^2 p$$

$$\delta T \equiv \rho c^2 - 3p$$

où $\delta T \equiv \delta T;^\alpha_\alpha$. Les $\delta T,_{\rho\sigma}$ non diagonaux sont identiquement nuls.

Avant d'établir les équations de champ, il nous reste à choisir convenablement l'expression de la constante χ. Une analyse détaillée de la question (v. p. ex. {15}, p. 207) montre que l'on doit poser:

$$(V\text{-}14) \qquad \chi \equiv -\frac{8\pi G}{c^4}$$

Nous sommes dès lors en mesure d'écrire les équations de champ de manière détaillée. Puisque le problème est purement statique, il va de soi que la métrique cherchée

est diagonale, si bien qu'il suffira d'écrire les équations du type (ρ,ρ). D'autre part, conformément aux deux expressions différentes de $(\Box u - w)$ données par (V-8) et (V-9), on peut écrire ces équations de deux manières:

(V-15) $(\Box u - w)$ selon (V-8):

$$(0,0): \quad -\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 + 3p)$$

$$(1,1): \quad \frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - \frac{2}{r^4}u_{,22} - \frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} = -\frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 - p)$$

$$(2,2): \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - \frac{2}{r^4}u_{,22} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 - p)$$

$$(3,3): \quad -\frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 - p)$$

(V-15') $(\Box u - w)$ selon (V-9):

$$(0,0'): \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - \frac{2}{r^4}u_{,22} - \frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r} = -\frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2$$

$$(1,1'): \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r} = -\frac{8\pi G}{c^4}p$$

$$(2,2'): \quad -\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}p$$

$$(3,3'): \quad -\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} + \frac{2}{r^4}u_{,22} = -\frac{8\pi G}{c^4}p$$

On remarque immédiatement qu'il est aisé de combiner les

équations (1,1') et (2,2'). En dérivant (1,1'), on obtient en effet:

$$-\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}(p'r + p)$$

soit, en tenant compte de (2,2'), une équation différentielle pour la pression seulement:

(V-16) $$p = p'r + p \quad \text{ou} \quad p' = 0$$

d'où l'on tire:

(V-17) $$p \equiv \text{const.} \equiv 0$$

ce dernier résultat s'obtenant en tenant compte des conditions aux limites (la pression est nulle à l'extérieur du cylindre). (V-17) permet, bien entendu, de simplifier considérablement les équations de champ (V-15) et (V-15'). D'autre part, chacun de ces systèmes comporte 4 équations à 5 inconnues, de sorte que nous pouvons choisir l'une quelconque d'entre elles. Afin de nous conformer à la solution de Weyl, nous poserons:

(V-18) $$u_{,11} = u_{,33}$$

L'équation (0,0) permet alors de déterminer $u_{,00}$, dont l'expression générale a la forme:

(V-19) $$u_{,00} \equiv \frac{\pi G\rho}{c^2} r^2 + \ln(Ar^B)$$

où A et B sont des constantes d'intégration. La métrique ne saurait admettre une singularité à l'origine, ce qui montre que $B \equiv 0$. D'autre part, la solution étant continue au bord du cylindre de rayon a, on détermine sans pei-

ne la constante additive de $u_{,00}$, ce qui nous donne finalement:

(V-20) $$u_{,00} \equiv \frac{\pi G\rho}{c^2}(r^2 + \alpha)$$

avec $\alpha \equiv a^2(2\ln a - 1)$, a ≡ rayon du cylindre. De la même manière, on peut intégrer l'équation (3,3), ce qui nous fournit $u_{,33}$, donc $u_{,11}$. La détermination de $u_{,22}$ n'offre alors plus de difficultés, et l'on est conduit aux résultats suivants:

(V-21)

$$u_{,00} \equiv \frac{\pi G\rho}{c^2}(r^2 + \alpha) \qquad u_{,22} \equiv r^2 u_{,00}$$

$$u_{,11} \equiv u_{,33} \equiv u_{,00} \qquad p \equiv 0$$

Rappelons que les potentiels de gravitation proprement dits se calculent selon les formules: $G_{,\rho\sigma} \simeq L_{,\rho\sigma} + 2u_{,\rho\sigma}$. Nous aurons l'occasion de revenir à ces résultats quand nous traiterons le problème du disque tournant.

Remarque. La TL étant une théorie du champ pur, l'introduction, dans son formalisme, du tenseur phénoménologique $T_{\mu\nu}$ de la TQ peut évidemment prêter à discussion. A ce propos, il convient de préciser très nettement que les équations (V-7) ont été formulées dans un but essentiellement heuristique. Grâce à la notion de matrice d'inertie $(t^{\lambda}{}_{\mu})$, propre à la TL, le formalisme de cette théorie se révèle d'une grande efficacité. Dans le problème du disque tournant p. ex. (ch. VII), cette méthode permet de considérer la vitesse de rotation ω comme une donnée a priori, tandis qu'elle apparaît comme constante d'intégration dans le formalisme de la TQ. L'établissement des relations (V-7) est d'autre part facilité par le fait que leurs membres de gauche sont rigoureusement identiques aux $\delta S_{\rho\sigma}$ de la TQ.

CHAPITRE VI

LES EQUATIONS DE CHAMP EN DEUXIEME APPROXIMATION

CAS GRAVITATIONNEL

Le problème du champ gravitationnel d'une particule chargée fournit l'un des rares exemples connus de solution exacte des équations d'Einstein. Dans le vide, on a par exemple pour g_{00} (v. {15}, p. 220):

$$g_{00} \equiv 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{A}{r^2} \tag{VI-1}$$

où A est une constante proportionnelle à G et à e^2 (e ≡ charge de la particule). Il est évident que ce dernier terme, qui est du second ordre par rapport à $\frac{1}{r}$, n'est pas accessible aux équations en 1^{e} approximation établies au chapitre II. Le traitement du présent problème par des méthodes approchées exige donc le développement de la 2^{e} approximation des équations de champ. Toutefois, puisque nous disposons déjà, dans le cas particulier, de la solution exacte du problème, une telle justification de cette seconde approximation n'a pas de sens. En revanche, le célèbre problème du disque tournant [1] fournit un excellent prétexte à une telle entreprise, du moins à première vue. En effet, dans le cas <u>extérieur</u>, le g_{00} exact vaut $1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}$. En se limitant au cas des petites vitesses, on constate que le terme $-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}$ est du second ordre par rapport à $\frac{\omega r}{c}$. Or, à ce jour, ce problème n'ayant pas reçu de solution exacte dans le cas <u>intérieur</u> (v. p. ex. {17}, p. 79), une solution approchée ne saurait se concevoir sans ces termes du second ordre. Dans ce qui suit, nous allons délibérément

[1] Pour plus de détails à ce sujet, voir le chapitre VII.

nous limiter au cas gravitationnel pur, c'est-à-dire que nous poserons $v_{,\rho\sigma} \equiv 0$: $q_{,\rho\sigma} \equiv u_{,\rho\sigma}$.

1. Deuxième approximation des équations de champ pour le vide.

Il s'agit de développer les équations:

(VI-2) $$\delta^2 W_{I\,,\rho\sigma} = 0$$

ou, plus précisément:

(VI-3) $$\delta^2 U_{I\,,\rho\sigma} = 0$$

puisque nous nous limitons au cas gravitationnel ($W_{I\,,\rho\sigma} \equiv U_{I\,,\rho\sigma} + V_{I\,,\rho\sigma}$, $V_{I\,,\rho\sigma} \equiv 0$ dans notre cas). Il s'agira donc de calculer les $\delta^2 W_{i\,,\rho\sigma}$ à partir des formules (II-25). Une fois de plus, nous avons à exécuter un travail plus fastidieux que difficile, dont nous n'exposerons que les grandes lignes. A titre d'exemple, nous esquisserons ci-après le calcul de $\delta^2 W_{1\,,\rho\sigma}$. Nous avons d'abord:

(VI-4)

$$\begin{aligned}\delta^2 W_{1\,,\rho\sigma} \equiv\ & 2\delta^2(D_{,\alpha} f'^{\ \alpha}_{\rho\ \sigma}) + 4\delta f_{,\alpha}\delta f'^{\ \alpha}_{\rho\ \sigma} - 4\delta f_{,\rho\alpha\beta}\delta f'^{\ \alpha\beta}_{\sigma} \\ & + 4\delta f_{,\rho\alpha\beta}\delta f'^{\alpha\beta}_{\ \sigma} + 4\delta f_{,\alpha\beta\rho}\delta f'^{\alpha\beta}_{\ \sigma} - L_{,\rho\sigma}\delta^2 H_1\end{aligned}$$

expression qui s'obtient aisément en se rappelant que les $f'^{\lambda}_{\ \mu\nu}$ sont identiquement nuls dans l'approximation zéro. H_1 étant une forme quadratique des f, $\delta^2 H_1$ sera de la forme $2\delta f \delta f$. Il va de soi que les δf figurant dans (VI-4) se calculent à l'aide des $u_{,\rho\sigma}$ obtenus en 1^{e} approximation, de sorte que l'essentiel de notre tâche réside dans l'explicitation de $2\delta^2(D_{,\alpha} f'^{\ \alpha}_{\rho\ \sigma})$. Nous aurons successivement:

$$
\begin{aligned}
&\delta^2(D,_\alpha f';_\rho{}^\alpha{}_\sigma) \quad \delta[\delta(D,_\alpha f';_\rho{}^\alpha{}_\sigma)] \\
&\delta[\delta(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} f';_\rho{}^\alpha{}_\sigma + \gamma';_{\beta\alpha}{}^\alpha f';_\rho{}^\beta{}_\sigma \\
&- \gamma';_{\rho\alpha}{}^\beta f';_\beta{}^\alpha{}_\sigma - \gamma';_{\sigma\alpha}{}^\beta f';_\rho{}^\alpha{}_\beta)] \\
&\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta^2 f';_\rho{}^\alpha{}_\sigma + 2\delta\gamma';_{\beta\alpha}{}^\alpha \delta f';_\rho{}^\beta{}_\sigma + t';_{\beta\alpha}{}^\alpha \delta^2 f';_\rho{}^\beta{}_\sigma \\
&- 2\delta\gamma';_{\rho\alpha}{}^\beta \delta f';_\beta{}^\alpha{}_\sigma - t';_{\rho\alpha}{}^\beta \delta^2 f';_\beta{}^\alpha{}_\sigma \\
&- 2\delta\gamma';_{\sigma\alpha}{}^\beta \delta f';_\rho{}^\alpha{}_\beta - t';_{\sigma\alpha}{}^\beta \delta^2 f';_\rho{}^\alpha{}_\beta
\end{aligned}
\tag{VI-5}
$$

Ce développement montre qu'on est finalement ramené, pour l'essentiel, à calculer les $\delta^2 f$. Partant de la définition de $f^\lambda;_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial g^\lambda;_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g^\lambda;_\mu}{\partial x^\nu})$, et tenant compte de la commutabilité des opérateurs δ et $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, on établit aisément les relations suivantes:

$$
\begin{aligned}
\delta^2 f^\lambda;_{\mu\nu} \equiv\ & t^\lambda;_{\alpha\mu} p';_\nu{}^\alpha + t^\lambda;_\alpha \frac{\partial p';_\nu{}^\alpha}{\partial x^\mu} \\
& - t^\lambda;_{\alpha\nu} p';_\mu{}^\alpha - t^\lambda;_\alpha \frac{\partial p';_\mu{}^\alpha}{\partial x^\nu}
\end{aligned}
\tag{VI-6}
$$

avec:

$$
g^\lambda;_\mu \approx t^\lambda;_\mu + \delta g^\lambda;_\mu + \frac{1}{2}\delta^2 g^\lambda;_\mu \tag{VI-7}
$$

$$
\delta g^\lambda;_\mu - t^\lambda;_\alpha q';_\mu{}^\alpha \tag{VI-7'}
$$

$$
\delta^2 g^\lambda;_\mu \equiv 2t^\lambda;_\alpha p';_\mu{}^\alpha \tag{VI-7''}
$$

Il ne reste plus qu'à faire passer l'indice λ de $\delta^2 f^\lambda;_{\mu\nu}$ à droite de la virgule. Pour cela, il suffit de partir des relations: $f';_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv g_\alpha;^\lambda f^\alpha;_{\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
&\delta^2 f';_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv \delta^2(g_\alpha;^\lambda f^\alpha;_{\mu\nu}) \equiv \\
&2\delta g_\alpha;^\lambda \delta f^\alpha;_{\mu\nu} + g_\alpha;^\lambda \delta^2 f^\alpha;_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{VI-8}
$$

En tenant notamment compte des relations (II-15') et (VI-6), et après quelques transformations, on trouve:

$$(VI\text{-}9) \qquad \delta^2 f;^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv (\partial,_{\mu} p;^{\lambda}{}_{\nu} - \partial,_{\nu} p;^{\lambda}{}_{\mu}) - q;^{\lambda}{}_{\alpha}(\partial,_{\mu} q;^{\alpha}{}_{\nu} - \partial,_{\nu} q;^{\alpha}{}_{\mu})$$

Les $\delta^2 \gamma;^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ se calculent de la même manière, et s'écrivent:

$$(VI\text{-}10) \qquad \delta^2 \gamma;^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv (\partial,_{\mu} p;^{\lambda}{}_{\nu} + \partial,_{\nu} p;^{\lambda}{}_{\mu}) - q;^{\lambda}{}_{\alpha}(\partial,_{\mu} q;^{\alpha}{}_{\nu} + \partial,_{\nu} q;^{\alpha}{}_{\mu})$$

En contractant les indices λ et ν dans les relations (VI-9) et (VI-10), on obtient $\delta^2 f,_{\mu}$ et $\delta^2 \gamma,_{\mu}$. Puisque nous nous limitons à l'étude du cas gravitationnel pur, il est opportun de décomposer $q,_{\rho\sigma}$ et $p,_{\rho\sigma}$ en leurs parties symétriques et antisymétriques selon les formules: $q,_{\rho\sigma} \equiv u,_{\rho\sigma} + v,_{\rho\sigma}$, $p,_{\rho\sigma} \equiv s,_{\rho\sigma} + t,_{\rho\sigma}$. En mettant les $G,_{\rho\sigma}$ sous la forme:

$$(VI\text{-}11) \qquad G,_{\rho\sigma} \approx L,_{\rho\sigma} + H,_{\rho\sigma} + K,_{\rho\sigma}$$

$H,_{\rho\sigma}$ et $K,_{\rho\sigma}$ étant des quantités du premier, respectivement du second ordre, on établit sans peine les formules suivantes:

$$(VI\text{-}11') \qquad H,_{\rho\sigma} \equiv 2u,_{\rho\sigma}$$

$$(VI\text{-}11'') \qquad K,_{\rho\sigma} \equiv 2s,_{\rho\sigma} + L'^{\alpha\beta} u,_{\alpha\rho} u,_{\beta\sigma}$$

On tire de $G,_{\alpha\rho} G'^{\alpha\sigma} \equiv \delta^{\sigma}_{\rho}$:

$$(VI\text{-}12) \qquad G'^{\rho\sigma} \approx L'^{\rho\sigma} - 2u'^{\rho\sigma} - 2s'^{\rho\sigma} + 3L,_{\alpha\beta} u'^{\alpha\rho} u'^{\beta\sigma}$$

Dès lors, le calcul des $\delta^2 U_{1,\rho\sigma}$ ne présente plus de difficultés majeures. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant:

(VI-13)

$$\begin{aligned}\delta^2 U_{1,\rho\sigma} \equiv\ & 2\partial_{,\alpha}\delta^2 f'^{\alpha}_{\ \rho\ \sigma} \\ & + 4\delta f'^{\alpha}_{\ \rho\ \sigma}(\delta\gamma_{,\alpha} + \delta f_{,\alpha}) - 4\delta f_{,\rho\alpha\beta}\delta f'^{\alpha\beta}_{\ \ \sigma} \\ & + 4\delta f'^{\alpha}_{\ \beta\ \sigma}(\delta f'^{\beta}_{\ \alpha\rho} - \delta\gamma'^{\beta}_{\ \alpha\rho}) \\ & + 4\delta f'^{\alpha}_{\ \rho\ \beta}(\delta f'^{\beta}_{\ \alpha\ \sigma} - \delta\gamma'^{\beta}_{\ \alpha\sigma}) \\ & - 2L_{,\rho\sigma}\delta f'^{\ \beta\gamma}_{\alpha}\delta f'^{\alpha}_{\ \beta\gamma}\end{aligned}$$

(VI-13')

$$\begin{aligned}\delta^2 U_{2,\rho\sigma} \equiv\ & \partial_{,\alpha}(\delta^2 f'^{\alpha}_{\ \sigma\ \rho} + \delta^2 f'^{\alpha}_{\ \rho\sigma}) \\ & + 2\delta f'^{\alpha}_{\ \sigma\ \rho}(\delta\gamma_{,\alpha} + \delta f_{,\alpha}) + 2\delta f'^{\alpha}_{\ \rho\sigma}(\delta\gamma_{,\alpha} + \delta f_{,\alpha}) \\ & - 2\delta\gamma'^{\beta}_{\ \sigma\alpha}(\delta f'^{\alpha}_{\ \beta\ \rho} + \delta f'^{\alpha}_{\ \rho\beta}) \\ & - 2\delta\gamma'^{\beta}_{\ \rho\alpha}(\delta f'^{\alpha}_{\ \sigma\ \beta} + \delta f'^{\alpha}_{\ \beta\sigma}) \\ & + 2\delta f_{,\alpha\beta\rho}\delta f'^{\alpha\beta}_{\ \ \sigma} - 2\delta f_{,\alpha\beta\rho}\delta f'^{\alpha\beta}_{\ \ \sigma} + 4\delta f_{,\alpha\beta\rho}\delta f'^{\beta\alpha}_{\ \ \sigma} \\ & - 2L_{,\rho\sigma}\delta f'^{\beta\alpha}_{\ \ \gamma}\delta f'^{\gamma}_{\ \alpha\beta}\end{aligned}$$

(VI-13'')

$$\begin{aligned}\delta^2 U_{3,\rho\sigma} \equiv\ & -\partial_{,\rho}\delta^2 f_{,\sigma} + 2\delta f_{,\alpha}(\delta f'^{\alpha}_{\ \rho\sigma} + \delta\gamma'^{\alpha}_{\ \rho\sigma}) \\ & + 4u_{,\rho\sigma}\partial_{,\alpha}\delta f'^{\alpha} + L_{,\rho\sigma}(\partial_{,\alpha}\delta^2 f'^{\alpha} + 2\delta\gamma_{,\alpha}\delta f'^{\alpha})\end{aligned}$$

Rappelons que les équations de champ pour le vide sont, en 2^{e} approximation, $\frac{1}{2}\delta^2 U_{1,\rho\sigma} + \delta^2 U_{2,\rho\sigma} - 2\delta^2 U_{3,\rho\sigma} = 0$. La partie de ces équations contenant des $s_{,\rho\sigma}$ est de la forme:

$$(VI\text{-}14) \qquad \partial_{,\alpha}\left[\delta^2 f'^{\alpha}_{\ \rho\ \sigma} + \delta^2 f'^{\alpha}_{\ \sigma\ \rho} + \delta^2 f'^{\alpha}_{\ \rho\sigma}\right] + 2\partial_{,\rho}\delta^2 f_{,\sigma} - 2L_{,\rho\sigma}\partial_{,\alpha}\delta^2 f'^{\alpha}$$

En se servant des formules (VI-9) pour les $\delta^2 f$, on montre aisément que la partie des expressions (VI-14) ne dépendant que des $s_{,\rho\sigma}$ et de leurs dérivées peut s'écrire:

$$(VI\text{-}15) \qquad 2\left[\Box s_{,\rho\sigma} + \partial_{,\rho}\partial_{,\sigma}s - (\partial_{,\rho}s_{,\sigma} + \partial_{,\sigma}s_{,\rho}) - L_{,\rho\sigma}(\Box s - \kappa)\right]$$

avec $s \equiv s'^{\alpha}_{\ \alpha}$, $s_{,\rho} \equiv \partial'^{\alpha}s_{,\rho\alpha}$, $\kappa \equiv \partial'^{\alpha}\partial'^{\beta}s_{,\alpha\beta}$. Ainsi, au facteur 2 près, les expressions (VI-15) sont exactement de la même forme que les membres de gauche des équations en 1^{e} approximation. Il importe toutefois de remarquer que, dans ce dernier cas, nous avions $\Box u - w \equiv 0$, alors qu'on peut montrer qu'il n'en est rien pour $\Box s - \kappa$. La contraction des équations de champ au moyen des $L'^{\rho\sigma}$ se révèle très fastidieuse pour la 2^{e} approximation, et ne fournit apparemment aucun résultat spectaculaire. L'application de ces équations à la solution de problèmes concrets nécessitera donc la mise en oeuvre détaillée des expressions (VI-13), (VI-13') et (VI-13''), comme nous allons le montrer maintenant pour le problème du champ de gravitation d'une particule chargée.

2. Champ gravitationnel d'une particule chargée.

Bien que nous cherchions à déterminer le champ gravitationnel d'une particule chargée dans le vide, il va de soi que le tenseur matériel (purement électromagnétique) n'est pas nul. Or, nous avons déjà signalé (v. chapitre V, 2) que les équations de la TL pour la gravitation sont identiques aux équations correspondantes de la TQ. Nous aurons donc en 2^{e} approximation:

$$(VI\text{-}16) \qquad {}^{\delta^2 U}_{I\,,\rho\sigma} = \chi\,\delta^2 T_{,\rho\sigma}$$

où $T_{,\rho\sigma}$ désigne le tenseur électromagnétique de la particule considérée (appelé habituellement $M_{,\rho\sigma}$ dans la littérature). En coordonnées polaires, les composantes de ce tenseur sont (v. p. ex. {15}, p. 218):

$$(VI\text{-}17) \qquad \begin{aligned} M_{,00} &\equiv -\frac{1}{8\pi c^2} G^{,11} F^{2}_{,10} \simeq \frac{1}{8\pi c^2}\frac{e^2}{r^4} \\ M_{,11} &\equiv -\frac{1}{8\pi c^2} G^{,00} F^{2}_{,10} \simeq -\frac{1}{8\pi c^2}\frac{e^2}{r^4} \\ M_{,22} &\equiv \frac{1}{8\pi c^2} G_{,22} G^{,11} G^{,00} F^{2}_{,10} \simeq \frac{1}{8\pi c^2}\frac{e^2}{r^2} \\ M_{,33} &\equiv \frac{1}{8\pi c^2} G_{,33} G^{,11} G^{,00} F^{2}_{,10} \simeq \frac{1}{8\pi c^2}\frac{e^2}{r^2}\sin^2\theta \end{aligned}$$

tous les autres $M_{,\rho\sigma}$ ($\rho \neq \sigma$) étant nuls. Nous avons calculé ces composantes selon les formules générales bien connues:

$$(VI\text{-}18) \qquad M_{,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{4\pi c^2}\left[\tfrac{1}{4} G_{,\rho\sigma} F^{,\alpha\beta} F_{,\alpha\beta} - F_{,\rho\alpha} F'^{\alpha}_{,\sigma}\right]$$

$F_{,\mu\nu}$ désignant le tenseur champ électromagnétique, dont la seule composante non nulle est ici $F_{,10} \equiv \frac{e}{r^2}$ (e ≡ charge de la particule). Dans les formules (VI-17), nous avons remplacé les $G_{,\rho\sigma}$ et $G^{,\rho\sigma}$ par $L_{,\rho\sigma}$, respectivement $L^{,\rho\sigma}$, car, comme il est facile de s'en convaincre, les $M_{,\rho\sigma}$ ci-dessus constituent déjà les termes du second ordre de leurs propres développements en séries de puissances de $\frac{1}{r}$, les deux premiers termes étant nuls. Finalement, nos équations de champ en 2^{e} approximation s'écriront:

$$(VI\text{-}19) \qquad \tfrac{1}{2}\,{}^{\delta^2 U}_{I\,,\rho\sigma} = \chi M_{,\rho\sigma}$$

avec $\chi \equiv -\frac{8\pi G}{c^2}$, dans le système d'unités utilisé pour ce

problème (électrostatique). Pratiquement, il suffira d'écrire les équations (0,0) et (1,1). Le calcul, fort long, de $\delta^2 U_{I,00}$ et de $\delta^2 U_{I,11}$, aboutit aux équations de champ suivantes:

$$(VI\text{-}20)\quad (0,0):\quad \frac{\partial s_{,11}}{\partial r} + \frac{1}{r} s_{,11} = \left[\frac{3G^2m^2}{2c^4} - \frac{Ge^2}{2c^4}\right] \frac{1}{r^3}$$

$$(1,1):\quad \frac{\partial s_{,00}}{\partial r} + \frac{1}{r} s_{,11} = -\left[\frac{G^2m^2}{2c^4} + \frac{Ge^2}{2c^4}\right] \frac{1}{r^3}$$

L'intégration de ces équations fournit, compte tenu des conditions aux limites:

$$(VI\text{-}21)\qquad s_{,00} \equiv -\left[\frac{G^2m^2}{2c^4} - \frac{Ge^2}{2c^4}\right] \frac{1}{r^2}$$

$$s_{,11} \equiv -\left[\frac{3G^2m^2}{2c^4} - \frac{Ge^2}{2c^4}\right] \frac{1}{r^2}$$

Les équations (VI-11'') permettent de calculer les termes du second ordre, $K_{,\rho\sigma}$, des développements de $G_{,00}$ et $G_{,11}$. Il vient:

$$(VI\text{-}22)\qquad \boxed{K_{,00} \equiv \frac{Ge^2}{c^4 r^2} \qquad K_{,11} \equiv -\left[4\frac{G^2m^2}{c^4} - \frac{Ge^2}{c^4}\right] \frac{1}{r^2}}$$

La comparaison des expressions (VI-22) avec les solutions exactes développées en séries montre que les résultats ci-dessus sont parfaitement corrects. Rappelons toutefois que la connaissance de la solution exacte du présent problème nous oblige à considérer le développement ci-dessus comme un exemple élémentaire d'application des équations de champ en 2^{e} approximation, et rien de plus. Pour le moment, l'utilisation de ces équations ne nous a encore rien appris de nouveau.

CHAPITRE VII

APPLICATION DE LA THEORIE LINEAIRE AU PROBLEME DU DISQUE TOURNANT

Comme nous l'avons déjà indiqué au début du chapitre précédent, la 2^{e} approximation des équations de champ devrait nous permettre de traiter avec succès le problème du disque tournant. C'est ce que nous examinerons d'une manière détaillée au paragraphe 2 de ce chapitre. Mais auparavant, il ne nous paraît pas inutile de résumer brièvement l'histoire de ce problème célèbre et d'esquisser un bilan de la question, telle qu'elle se présente à l'heure actuelle.

1. Aperçu historique du problème.

La première mention du problème relativiste du disque tournant date de 1909, quand Ehrenfest énonça son fameux paradoxe ({18}): pour un observateur placé dans un référentiel galiléen $(O\vec{x}_o, O\vec{y}_o)$ par rapport auquel le disque, centré en O et de rayon R, est animé d'une vitesse de rotation uniforme ω, les règles situées le long de la circonférence subiront la contraction de Lorentz, si bien que le pourtour du disque aura pour mesure $2\pi R(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$. En revanche, la longueur d'un rayon ne subira aucune modification, de telle sorte que le rapport circonférence/rayon sera égal à $2\pi(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} < 2\pi$, contrairement aux exigences de la géométrie euclidienne. Bien entendu, Einstein eut beau jeu, par la suite, de réfuter cette argumentation en faisant observer que le disque ne constitue pas un système d'inertie et qu'il ne saurait être question, par conséquent, de lui appliquer les lois de la relativité restreinte sans précautions adéquates.

Sur le plan expérimental, il convient de mentionner tout particulièrement les travaux de Harress ({19}), Sagnac ({20} et {21}) et Pogany ({22} et {23}). D'autres expériences à ce sujet ont été proposées par Prunier, Dufour et Langevin, d'une part (avec des électrons, v. {24}, {25} et {26}), par Berenda d'autre part (échantillon radioactif dans un cyclotron, v. {27}). Cependant, la réalisation de ces dernières se heurte à des difficultés techniques considérables. Par exemple, l'idée de Prunier et de Dufour de substituer des électrons aux rayons lumineux du dispositif de Harress conduit à des effets du second ordre, pratiquement non mesurables ({28}).

Nous n'insisterons pas sur le principe, bien connu, des expériences de Harress, Sagnac et Pogany, qui représentent le pendant optique de la célèbre expérience du pendule de Foucault. Il n'est toutefois pas sans intérêt de rappeler qu'en son temps, Sagnac considérait les résultats obtenus comme une preuve de l'existence de mouvements absolus, ce qui serait contraire au postulat fondamental de la relativité restreinte énoncé par Einstein quelques années plus tôt. L'erreur de Sagnac fut évidemment d'oublier que le mouvement de rotation du disque a lieu par rapport à un système d'inertie, et non relativement à un soi-disant "éther". D'ailleurs, ces tentatives représentent-elles à proprement parler des tests "cruciaux" pour la théorie de la relativité? Malheureusement, la réponse est "non", car la formule de Sagnac, $\Delta t = 4\frac{\omega S}{c^2}$, est du premier ordre en $\frac{v}{c}$, et il est bien connu que la relativité restreinte et la théorie classique donnent le même résultat en 1^{e} approximation, alors qu'elles diffèrent l'une de l'autre au second ordre. Il n'est donc pas question de considérer les résultats de Harress, Sagnac et Pogany comme une confirmation expérimentale de la théorie de la relativité.

Cette conclusion malheureusement négative ne devait cependant pas empêcher de nombreux chercheurs de traiter le problème du disque dans le cadre de la relativité restreinte, en dépit du caractère non inertiel du système. Pour détourner cette difficulté, la plupart des auteurs assimilent le mouvement instantané d'un point quelconque du disque à une translation de vitesse ωr, ce qui leur permet d'appliquer la transformation de Lorentz. On trouve alors pour la métrique (v. p. ex. {29}, {30}, {31}, {32}):

$$(\text{VII-1}) \quad ds^2 \equiv \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)(dx^o)^2 - dr^2 - \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} - dz^2$$

Cette métrique définit la géométrie intrinsèque du disque, telle qu'un observateur lié à celui-ci la verrait. Bien qu'elle conduise à une interprétation correcte des expériences de Harress, Sagnac et Pogany, elle n'est pas à l'abri de toute critique. En effet, (VII-1) est manifestement incompatible avec la loi relativiste de composition des vitesses. D'autre part, il faut que l'on ait $\omega r < c$. Que se passe-t-il alors si cette condition n'est pas remplie? Pour remédier à ces inconvénients, certains auteurs ({33}, {34}, {35}, {36}) ont tenté, en faisant notamment intervenir la théorie des groupes, de construire des métriques satisfaisant à la loi relativiste de composition des vitesses.

Toutefois, et quel que soit le bien que l'on puisse penser des solutions fort estimables dont nous venons de parler, il ne faut jamais perdre de vue que le disque tournant est un système accéléré, auquel la relativité restreinte ne saurait s'appliquer en toute rigueur. De toute manière, il s'agit, de l'aveu même d'un des meil-

leurs connaisseurs de la question, le physicien japonais H. Takeno, d'un problème "très compliqué et difficile" ({36}). Dans ces conditions, la relativité générale peut-elle nous apprendre quelque chose de plus dans ce domaine?

Pour autant que l'on se contente de traiter le problème <u>à la surface</u> du disque, soit dans le vide ($T_{\mu\nu} \equiv 0$), tout revient à résoudre les équations d'Einstein: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$. Comme nous le montrerons au paragraphe suivant, la solution obtenue coïncide simplement avec la métrique résultant de l'application de la transformation:

$$(VII\text{-}2) \quad x^o \equiv ct \equiv x^{o\prime} \quad r \equiv r' \quad \theta \equiv \frac{\omega}{c}x^{o\prime} + \theta' \quad z \equiv z'$$

à l'intervalle "au repos" $ds^2 \equiv (dx^o)^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - dz^2$, c'est-à-dire (en supprimant les accents):

(VII-3)

$$ds^2 \equiv (1 - \frac{\omega^2r^2}{c^2})(dx^o)^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - dz^2 - 2\frac{\omega r^2}{c}dx^o d\theta$$

Bien que ce résultat n'ait rien de très spectaculaire en soi, il suffit déjà pour mettre en évidence l'un des aspects essentiels du problème du disque en relativité générale. En effet, la métrique (VII-3) contient un terme en $dx^o d\theta$, et l'on peut démontrer qu'il n'existe aucune transformation régulière de coordonnées permettant de diagonaliser le tenseur $g_{\mu\nu}$. Comme le dit fort bien Mme. Tonnelat ({17}, p. 79), "aucun groupe d'isométrie ne permet de définir un "espace" du disque", contrairement à la solution de Schwarzschild par exemple, qui conduit à une décomposition globale en "espace" et "temps" associé.

C'est cette particularité fondamentale du problème du disque que Kursunoglu ({37}) semble avoir complètement

négligée dans sa tentative de traiter rigoureusement le cas intérieur ($T_{\mu\nu} \neq 0$) dans le cadre de la relativité générale. Moyennant des manipulations mathématiques discutables, cet auteur parvient finalement à la métrique diagonale (VII-1), déjà obtenue en relativité restreinte. Bien que ce résultat ne soit évidemment pas dépourvu de toute signification, il est cependant erroné de vouloir en faire une conséquence des équations d'Einstein.

Dans un article ultérieur ({38}), Kichenassamy s'est livré à un examen détaillé du travail de Kursunoglu. S'il reproche à juste titre à ce dernier d'opérer une transformation de coordonnées douteuse, ne s'avance-t-il pas trop en contestant le bien-fondé de l'hypothèse $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(r)$? Kichenassamy croit en effet pouvoir déduire de celle-ci l'existence d'un temps universel valable sur tout le disque (temps localement newtonien). Objection à laquelle nous répondrons en faisant remarquer que, selon les formules bien connues (v. p. ex. {39}, p. 317):

$$(\text{VII-4}) \qquad d\tau \equiv \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, dx^o \quad \text{et} \quad \Delta x^o \equiv - \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}}$$

La première de ces relations montre que le temps propre τ s'écoule différemment selon les différentes valeurs de r ($g_{00} \equiv 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}$), tandis que la seconde rappelle que deux événements simultanés ayant lieu en deux points A et B infiniment voisins ne sont pas caractérisés par une seule et même valeur de x^o. Dans notre cas, $g_{02} \equiv - \frac{\omega r^2}{c}$ est différent de 0, et si $d\theta \neq 0$, il en est de même pour Δx^o. D'ailleurs, en utilisant l'expression de l'intervalle spatial dl^2:

$$(\text{VII-5}) \qquad dl^2 \equiv \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right)dx^i dx^j \qquad (i,j = 1, 2, 3)$$

on trouve:

$$(VII\text{-}5') \qquad dl^2 \equiv dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} + dz^2$$

ce qui montre, de concert avec (VII-4), que la métrique (VII-3) est bel et bien localement minkowskienne, et constitue ainsi une solution fort acceptable de notre problème dans le vide.

En revanche, le problème se complique singulièrement dans le cas intérieur. L'impossibilité, qui tient à la nature des choses, de définir un "espace" du disque, est à l'origine de difficultés mathématiques pratiquement insurmontables, même si l'on admet l'hypothèse de Kursunoglu, selon laquelle les potentiels de gravitation ne dépendent que de la seule variable r. Remarquons à ce propos que le problème est déjà fort compliqué quand le disque (il serait naturellement préférable de parler d'un cylindre dans ce cas) est au repos.

A l'heure actuelle, seuls les deux auteurs susmentionnés ont essayé de résoudre rigoureusement le problème. Nous venons de voir pour quelles raisons il est difficile d'accepter la solution de Kursunoglu. De son côté, Kichenassamy a abordé la question d'une manière originale, à l'aide de ce qu'il appelle la "méthode des transformées", ce qui lui a notamment permis d'interpréter correctement l'effet Harress-Sagnac-Pogany. Mais nous ignorons si, à ce jour, cet auteur a pu obtenir la forme exacte des $g_{\mu\nu}$ à l'aide des équations de la relativité générale.

A côté de ces deux tentatives rigoureuses, il faut encore mentionner un certain nombre de travaux à ce sujet, parus ces vingt dernières années (v. p. ex. {40}, {41}, {42}, {43}, {44}). Dans la plupart de ceux-ci, on s'efforce surtout de préciser la structure du tenseur $T_{\mu\nu}$, en accord avec différentes hypothèses relatives à la nature ma-

térielle du cylindre. Il s'agit donc essentiellement de mécanique relativiste des milieux continus. En outre, quelques solutions approchées pour les $g_{\mu\nu}$ sont indiquées, qui dépendent toutes de la structure particulière adoptée dans chaque cas pour $T_{\mu\nu}$.

Que dire pour conclure, sinon que l'on paraît encore fort éloigné d'une solution définitivement satisfaisante du problème du disque, ou mieux, du cylindre tournant?

2. Solution exacte dans le cas extérieur.

Si la condition $\frac{\omega a}{c} << 1$ est réalisée (a ≡ rayon du disque), on peut traiter le problème dans le cadre de la mécanique classique, et la transformation de coordonnées (VII-2) conduit sans peine à la métrique (VII-3), dont la matrice s'écrit:

$$(VII\text{-}6) \qquad (g_{\mu\nu}) \equiv \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} & 0 & -\frac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega r^2}{c} & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Considérant ce résultat, nous admettrons que, dans le cas général, seuls ne sont pas identiquement nuls les potentiels g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33} et $g_{02} \equiv g_{20}$. Il est d'autre part plausible de poser immédiatement $g_{33} \equiv -1$. Nous reprendrons enfin à notre compte l'hypothèse de Kursunoglu: $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(r)$.

Posons, pour simplifier l'écriture:

$$(VII\text{-}7) \qquad g_{00} \equiv f(r) \qquad g_{02} \equiv h(r)$$

$$g_{11} \equiv -k(r) \qquad g_{22} \equiv -l(r)$$

A partir de là, le calcul des $S_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ se développe selon les schémas habituels. Les équations de champ $S_{\mu\nu} = 0$ (ou, ce qui revient au même, puisqu'il s'agit du cas extérieur, $R_{\mu\nu} = 0$) sont d'une forme extrêmement compliquée. Moyennant quelques transformations et combinaisons appropriées, elles se ramènent cependant à un système de quatre équations relativement simples:

(VII-8) $\qquad f'l' + h'^2 = 0$

(VII-8') $\qquad f'^2 = Ak(fl + h^2)$

(VII-8'') $\qquad l'^2 = Bk(fl + h^2)$

(VII-8''') $\qquad h'^2 = Ck(fl + h^2)$

Il convient de remarquer que les trois dernières équations (VII-8) résultent déjà d'une intégration partielle du système initial (celui-ci étant bien entendu du second ordre), et que A, B, C sont précisément des constantes d'intégration arbitraires. En fait, les quatre équations (VII-8) ne sont pas indépendantes, et admettent par suite une infinité de solutions. Cependant, si nous posons à priori $k \equiv -1$ [1], comme le fait d'ailleurs Kursunoglu, le système est entièrement déterminé et peut se résoudre ainsi: les trois dernières équations montrent immédiatement que chacune des fonctions cherchées peut s'exprimer linéairement en fonction d'une autre, par exemple:

(VII-9) $\qquad f = Dh + E \qquad l = Fh + G$

avec la relation: $DF = -1$, fournie par (VII-8). En introduisant (VII-9) dans (VII-8'''), on obtient:

[1] On peut également faire remarquer que cette valeur de k est en accord avec la solution de Weyl (v. paragraphes 3 et 4) du problème à symétrie cylindrique.

(VII-10) $$h'^2 = Hh + K \qquad (k \equiv 1)$$

Cette équation pour h s'intègre aisément et possède la solution générale:

(VII-11) $$h \equiv Mr^2 + Nr + P$$

avec $M \equiv \frac{H}{4}$. En vertu des relations (VII-9), f et l seront de la même forme. Les conditions aux limites (pour $\omega \to 0$, resp. $r \to 0$) permettent de poser:

(VII-12) $$f \equiv 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \qquad h \equiv - \frac{\omega r^2}{c} \qquad l \equiv r^2$$

Rappelons que cette solution est valable à la surface du disque, ou, si l'on préfère, dans un cylindre "vide". Elle nous servira de point de départ pour établir une solution approchée dans le cas intérieur (v. paragraphe 5).

3. Les différents types de solutions approchées dans le cas intérieur.

Supposons un instant qu'il nous ait été impossible de trouver une solution exacte dans le cas extérieur. Nous pourrions alors considérer la métrique (VII-3) comme une solution approchée du problème, solution nécessitant la mise en oeuvre des équations de champ en seconde approximation, en raison du terme du 2e ordre $- \frac{\omega^2 r^2}{c^2}$ figurant dans g_{00}. C'est cette idée que nous allons tenter d'appliquer à la recherche d'une solution approchée valable dans le cas intérieur.

Nous avons déjà signalé au paragraphe 1 les articles plus ou moins récents relatifs à la structure du tenseur matériel $T_{\mu\nu}$. Dans le présent travail, notre but est moins de nous intéresser à ce tenseur que de montrer l'élégance

et l'efficacité de la méthode linéaire appliquée au problème du disque. C'est pourquoi nous formulerons immédiatement une hypothèse simplificatrice à propos du contenu matériel du cylindre et du tenseur $T_{\mu\nu}$.

Hypothèse. Le cylindre tournant est rempli d'un liquide incompressible parfait de densité constante ρ donnée (ρ ne dépend donc pas de r par exemple, tandis que la pression p sera une fonction de r, comme nous le verrons plus loin).

Nous justifierons cette hypothèse de la manière suivante. En raison du principe d'équivalence, l'intérieur du cylindre tournant peut être assimilé à un champ de gravitation, au même titre que le champ correspondant à la solution intérieure de Schwarzschild. Or, on établit généralement cette dernière dans le cas d'un fluide incompressible parfait de densité constante donnée (v. p. ex. {45}, p. 245).

Cela posé, on peut aborder le problème selon trois points de vue différents, que nous exposerons brièvement ci-après.

a) Le cylindre est initialement au repos et vide, ce qui correspond simplement à la métrique $ds^2 \equiv (dx^o)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2$. On imagine ensuite le cylindre rempli d'un fluide de faible densité et animé d'une vitesse de rotation telle que, pour tout point du cylindre, on ait: $\frac{\omega r}{c} << 1$, et l'on examine comment les $g_{\mu\nu}$ ci-dessus sont modifiés. Cette méthode nécessite l'utilisation des équations en 2^{e} approximation. Elle est donc valable pour de faibles densités et pour des petites vitesses (v. paragraphe 4).

b) Le cylindre vide tourne à une vitesse angulaire ω quelconque (métrique (VII-3)). On le remplit d'un fluide de faible densité, et l'on cherche comment la métrique (VII-3) est modifiée. Ici, la 1^{e} approximation suffit (v. paragraphe 5).

c) Le cylindre se trouve d'abord au repos, rempli d'un fluide de densité constante ρ quelconque. Les équations $S_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$ (symétrie cylindrique, cas intérieur) fournissent la métrique correspondante. On imprime ensuite au cylindre un faible mouvement de rotation, ce qui a pour effet de modifier les $g_{\mu\nu}$. Dans ce cas, la 2^{e} approximation est également nécessaire. Malheureusement, l'obtention de la solution statique ($\omega = 0$) semble se heurter à des difficultés mathématiques considérables. Aussi renoncerons-nous à traiter ce cas, malgré son intérêt intrinsèque évident. Il y aurait là en effet prétexte à développer une véritable "théorie des perturbations" de la relativité générale.

Nous allons maintenant exposer en détail les cas a) et b).

4. Méthode a): ω et ρ petits.

Initialement, le cylindre, vide, est au repos, de telle sorte que la solution du problème dans l'approximation zéro est simplement fournie par la métrique $ds^2 \equiv (dx^o)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2$. On introduit ensuite un fluide de faible densité ρ dans le cylindre, auquel on imprime un mouvement de rotation tel que $\frac{\omega r}{c} << 1$. Il s'agit alors de calculer les potentiels de gravitation en 1^{e} approximation.

Or, nous disposons déjà de tous les éléments nécessaires à la détermination de ces potentiels. En effet: les équations en 1^{e} approximation sont <u>linéaires</u>, de telle sorte que, dans cette approximation, la solution de notre problème s'obtiendra par une simple superposition des potentiels correspondant à la présence de matière, d'une part, et au mouvement de rotation, d'autre part. Tenant compte des expressions (V-21) et de la métrique (VII-3), nous aurons donc:

(VII-13)
$$u_{,00} \equiv \frac{\pi G\rho}{c^2}(r^2 + \alpha) \qquad u_{,02} \equiv -\frac{\omega r^2}{2c}$$
$$u_{,11} \equiv u_{,33} \equiv u_{,00} \qquad u_{,22} \equiv r^2 u_{,00} \qquad p \equiv 0$$

avec $\alpha \equiv a^2(2\ln a - 1)$, tous les autres $u_{,\rho\sigma}$ étant nuls. En revanche, les équations en 2^{e} approximation ne sont déjà plus linéaires, si bien que leur résolution se révélera beaucoup plus délicate qu'en 1^{e} approximation.

En seconde approximation, les équations de champ s'écriront:

(VII-14)
$$\delta^2 U_{I,\rho\sigma} = -\frac{8\pi G}{c^4}\delta^2 T_{,\rho\sigma}$$

On trouvera l'expression des $\delta^2 U_{I,\rho\sigma}$ au chapitre VI. Le calcul des $\delta^2 T_{,\rho\sigma}$ est un peu long, mais facile, et permet d'établir le tableau suivant:

(VII-15)
$$\delta^2 T_{,00} \equiv 4\pi G\rho^2(r^2 + \alpha) \qquad \delta^2 T_{,02} \equiv -2\rho c\omega r^2$$
$$\delta^2 T_{,11} \equiv \delta^2 T_{,33} \equiv 2p \qquad \delta^2 T_{,22} \equiv 2r^2 p$$

La pression étant nulle dans les approximations 0 et 1, nous avons: $p \approx \frac{1}{2}\delta^2 p$, ou $2p \approx \delta^2 p$, en accord avec le fait que les $\delta^2 T_{,\rho\sigma}$ sont des quantités du second ordre.

Le calcul des $\delta^2 U_{I,\rho\sigma}$ est évidemment très long et très fastidieux, et nous nous contenterons d'en donner le résultat. Les équations de champ "diagonales" pour les $s_{,\rho\sigma}$ prennent finalement la forme:

(VII-16)

$$(0,0): \quad -\frac{\partial^2 s_{,00}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial s_{,00}}{\partial r} = \frac{4\pi^2 G^2 \rho^2 \alpha}{c^4} + \frac{3\omega^2}{2c^2} - \frac{12\pi G}{c^4} p$$

$$(1,1): \quad \frac{\partial^2 s_{,00}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{,11}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 s_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial s_{,22}}{\partial r} - \frac{2}{r^4} s_{,22}$$
$$- \frac{\partial^2 s_{,33}}{\partial r^2} = \frac{16\pi^2 G^2 \rho^2 \alpha}{c^4} + \frac{4\pi G}{c^4} p + \frac{20\pi^2 G^2 \rho^2}{c^4} r^2$$

$$(2,2): \quad \frac{1}{r}\frac{\partial s_{,00}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{,11}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 s_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial s_{,22}}{\partial r} - \frac{2}{r^4} s_{,22}$$
$$- \frac{1}{r}\frac{\partial s_{,33}}{\partial r} = \frac{16\pi^2 G^2 \rho^2 \alpha}{c^4} + \frac{4\pi G}{c^4} p + \frac{20\pi^2 G^2 \rho^2}{c^4} r^2$$

$$(3,3): \quad -\frac{\partial^2 s_{,33}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial s_{,33}}{\partial r} = \frac{12\pi^2 G^2 \rho^2 \alpha}{c^4} + \frac{4\pi G}{c^4} p + \frac{16\pi^2 G^2 \rho^2}{c^4} r^2$$

système auquel nous ajouterons l'équation pour $s_{,02}$:

(VII-17)
$$-\frac{\partial^2 s_{,02}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{,02}}{\partial r} = 0$$

Bien que ces équations soient aisément intégrables, la forme explicite des $s_{,\rho\sigma}$ ne nous intéresse guère ici. En l'occurrence, les équations de champ suffisent déjà pour montrer que leur solution ne sera pas autre chose que la superposition de la solution "statique" ($\omega = 0$, $\rho \neq 0$) et de la solution "cinétique" ($\omega \neq 0$, $\rho = 0$), et cela, en dépit du fait que les équations en 2^{e} approximation ne soient déjà plus linéaires en général. Sans vouloir mettre en cause l'intérêt que présente la méthode exposée ci-dessus, force est bien de reconnaître cependant que les résultats obtenus sont décevants, dans la mesure où ils ne font pas apparaître de termes combinant les deux effets physiques impliqués dans ce problème (de la forme $\frac{\rho\omega r}{c}$ par exemple). De tels termes apparaissent effectivement quand on élabore l'équation (0,2), mais ils finissent par s'annuler, et l'on obtient l'équation (VII-17), qui ne

contient ni ρ, ni ω. Il faut alors se résoudre à poser $s_{,02} \equiv 0$. Les développements du paragraphe suivant nous permettront de mieux comprendre les raisons du caractère peu convaincant de la présente solution.

5. Méthode b): ω quelconque, ρ petit.

Au paragraphe 2, nous avons montré que la métrique (VII-3) constitue une solution acceptable du problème du disque dans le cas extérieur. L'idée de la méthode que nous exposerons maintenant est la suivante.

La métrique (VII-3) se déduit de $ds^2 \equiv (dx^o)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2$ par une simple transformation de coordonnées. Or, cet intervalle "au repos" étant euclidien, il en sera de même de (VII-3). En effet, bien que la géométrie spatiale du disque ne soit pas euclidienne (v. (VII-5')), il importe de remarquer que l'espace-temps quadridimensionnel est caractérisé par des $R^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ identiquement nuls, en vertu du caractère tensoriel de ces quantités. La métrique (VII-3) correspondant ainsi à un univers de Lorentz (espace-temps "vide"), ou, en d'autres termes, à un "champ inertiel" $L_{,\rho\sigma}$, la transformation (VII-2) nous fournit immédiatement tous les éléments nécessaires à la mise en oeuvre des équations $\delta U_{,\rho\sigma} = \chi \delta T_{,\rho\sigma}$. (VII-3) représente donc la solution de notre problème dans l'approximation zéro.

Pour obtenir la 1^{e} approximation, nous supposerons que le cylindre est rempli d'un fluide de faible densité ρ. Il s'agit alors de résoudre les équations de champ sous leur forme (V-7), ($\Box u - w$) n'étant naturellement pas nul dans ce cas.

La transformation de coordonnées:

$$
\text{(VII-18)} \qquad
\begin{aligned}
y^0 &\equiv ct \equiv x^0 \\
y^1 &\equiv r\cos\left(\frac{\omega x^0}{c} + \theta\right) \\
y^2 &\equiv r\sin\left(\frac{\omega x^0}{c} + \theta\right) \\
y^3 &\equiv z
\end{aligned}
$$

dans laquelle les y^λ sont les coordonnées cartésiennes de l'espace-temps "fixe" et (x^0, r, θ, z), les coordonnées polaires du cylindre tournant, permet de calculer immédiatement les $t^\lambda{}_{;\mu} \equiv \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu}$:

$$
\text{(VII-19)} \qquad (t^\lambda{}_{;\mu}) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega r}{c}\sin\phi & \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \frac{\omega r}{c}\cos\phi & \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

avec $\phi \equiv \frac{\omega x^0}{c} + \theta$. On calcule ensuite les $t^\lambda{}_{;\mu\nu}$:

$$
\text{(VII-20)} \qquad t^1{}_{;00} \equiv -\frac{\omega^2 r}{c^2} \qquad t^1{}_{;02} \equiv -\frac{\omega r}{c} \qquad t^1{}_{;22} \equiv -r
$$

$$
t^2{}_{;01} \equiv \frac{\omega}{cr} \qquad t^2{}_{;12} \equiv \frac{1}{r}
$$

Les coefficients $N^{\mu\nu}{}_{;\rho\sigma\alpha\beta}$ qui interviennent effectivement dans nos équations sont les suivants:

(VII-21)

$$
N^{22}{}_{;0011} \equiv N^{22}{}_{;1100} \equiv \frac{\omega^2}{c^2 r^2} \qquad N^{22}{}_{;0211} \equiv N^{22}{}_{;2011} \equiv \frac{\omega}{cr^2}
$$

$$
N^{22}{}_{;1102} \equiv N^{22}{}_{;1120} \equiv \frac{\omega}{cr^2} \qquad N^{22}{}_{;1122} \equiv N^{22}{}_{;2211} \equiv \frac{1}{r^2}
$$

Le tenseur métrique $L_{,\rho\sigma}$ est donné par (VII-3):

$$(VII\text{-}22)\quad (L,_{\rho\sigma}) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} & 0 & -\frac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega r^2}{c} & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(VII\text{-}22')\quad (L'^{\rho\sigma}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\omega}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} & 0 & -\frac{1}{r^2}(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On détermine les $\delta T,_{\rho\sigma}$ de la même manière qu'au chapitre V, paragraphe 2, à cette nuance près que nous avons maintenant affaire à un tenseur métrique non diagonal (VII-22). On trouve:

$$\delta T,_{00} \equiv \rho c^2 (1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}) \qquad \delta T,_{02} \equiv -\rho c \omega r^2$$

$$(VII\text{-}23)\quad \delta T,_{11} \equiv \delta T,_{33} \equiv p \qquad \delta T,_{22} \equiv \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}(\rho\omega^2 r^2 + p)$$

$$\delta T \equiv \rho c^2 - 3p$$

Par contraction des équations de champ avec $L'^{\rho\sigma}$, on a:

$$(VII\text{-}24)\qquad \Box u - w = \frac{4\pi G}{c^4}\delta T \equiv \frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 - 3p)$$

Tenant compte des relations (VII-20)-(VII-24), nous établissons sans difficultés les équations de champ. Nous renoncerons à donner les détails de leur élaboration, non sans faire remarquer toutefois que l'on obtient deux systèmes équivalents, mais formellement distincts, selon l'expression que l'on adopte pour $(\Box u - w)$. Ecrivons d'abord les équations avec $(\Box u - w) = \frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 - 3p)$:

(VII-25)

$$(0,0): \quad -\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} + \frac{\omega^2 r}{c^2}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r}$$
$$- \frac{\omega^2}{c^2 r}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - 2\frac{\omega^2}{c^2 r^2}u_{,22} - \frac{\omega^2 r}{c^2}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r}$$
$$- 2\frac{\omega^3 r}{c^3}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} + 4\frac{\omega}{cr}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} =$$
$$- \frac{4\pi G}{c^4}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)(\rho c^2 + 3p)$$

$$(0,2): \quad \frac{\omega^2 r}{c^2}\left(\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} + \frac{\partial u_{,11}}{\partial r}\right) + \frac{\omega^2}{c^2 r}\left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - 2\frac{\omega^2}{c^2 r^2}u_{,22}$$
$$- \frac{\omega^2 r}{c^2}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r} - \frac{\omega}{c}\frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial r^2} + \frac{\omega}{cr}\left(1 - 2\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} =$$
$$\frac{4\pi G}{c_2^4}\frac{\omega^2 r^2}{c^2}(\rho c^2 + 3p)$$

$$(1,1): \quad \frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r}$$
$$- \frac{2}{r^4}u_{,22} - \frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} - 2\frac{\omega}{c}\frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial r^2} =$$
$$\frac{4\pi G}{c^4}(p - \rho c^2)$$

$$(2,2): \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2 r}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r}$$
$$- \frac{2}{r^4}u_{,22} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r} - 2\frac{\omega}{cr}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} =$$
$$\frac{4\pi G}{c^4}\frac{1}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\left[p\left(1 - 3\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) - \rho c^2\left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\right]$$

$$(3,3): \quad -\frac{\partial^2 u_{,33}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,33}}{\partial r} = \frac{4\pi G}{c^4}(p - \rho c^2)$$

Si l'on exprime ($\Box u - w$) en fonction des $u_{,\rho\sigma}$ et de leurs dérivées, les équations de champ s'écrivent:

(VII-25')

$$(0,0'): \quad -\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} - \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 u_{,11}}{\partial r^2}$$
$$- \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)2\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - \frac{2}{r^4}u_{,22}$$
$$- 2\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial r^2} + 2\frac{\omega}{cr}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} =$$
$$- \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)$$

$$(0,2'): \quad -\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\frac{\partial^2 u_{,11}}{\partial r^2}$$
$$+ \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r}$$
$$- \frac{\omega}{c}\left(1 - 2\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial r^2} + \frac{\omega}{cr}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} = \frac{8\pi G}{c^4}\rho\omega^2 r^2$$

$$(1,1'): \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} - \frac{\omega^2}{c^2 r}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} + 2\frac{\omega}{cr}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} = -\frac{8\pi G}{c^4}p$$

$$(2,2'): \quad -\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_{,11}}{\partial r^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + 2\frac{\omega}{c}\frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial r^2} =$$
$$- \frac{8\pi G}{c^4}\frac{1}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}(\rho\omega^2 r^2 + p)$$

$$(3,3'): \quad -\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r}$$
$$+ \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - \frac{\omega^2}{c^2 r}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} + \frac{2}{r^4}u_{,22}$$
$$+ 2\frac{\omega}{c}\frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial r^2} + 2\frac{\omega}{cr}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r} = -\frac{8\pi G}{c^4}p$$

Nous avons donc affaire à un système de 5 équations pour 6 fonctions inconnues. Or, la solution de Weyl mentionnée au chapitre V est telle que $G_{,11} = G_{,33}$. Nous supposerons que c'est encore le cas ici et que nous aurons alors: $u_{,11} = u_{,33}$. Nous en avons déjà tenu compte dans (VII-25').

Intégration des systèmes (VII-25) et (VII-25').

Comme il est aisé de le constater, la structure relativement complexe des équations de champ rend leur intégration assez délicate. Nous en exposerons les grandes lignes ci-après.

L'équation (1,1') du système (VII-25') ne contient que des dérivées premières. Dérivons-la:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_{,00}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2 r^2}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - 2\frac{\omega}{cr^2}\frac{\partial u_{,02}}{\partial r}$$
$$- \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_{,00}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_{,11}}{\partial r^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r}\cdot\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + 2\frac{\omega}{cr}\frac{\partial^2 u_{,02}}{\partial r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}\frac{dp}{dr}$$

En combinant cette relation avec l'équation (2,2') du même système, il vient, après quelques transformations:

$$\text{(VII-26)} \qquad \frac{dp}{dr} - \frac{\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}{r\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)}\, p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{r\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)} \qquad 1)$$

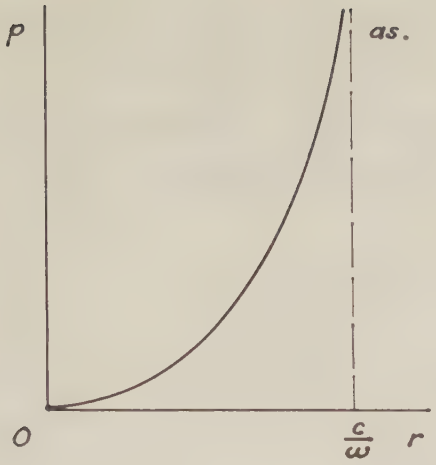
Cette équation différentielle linéaire pour p s'intègre sans difficultés, et sa solution générale est de la forme (rappelons que $\rho \equiv$ constante):

$$\text{(VII-27)} \qquad p \equiv -\rho c^2 + \frac{A}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}$$

Pour r = 0, p doit être nul, comme nous l'avons vu au chapitre V, et l'on obtient:

$$\text{(VII-28)} \qquad \boxed{p \quad \rho c^2\left[-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}\right]}$$

1) On peut aussi obtenir cette équation à partir des équations du mouvement: $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$.



La figure ci-contre montre comment la pression p dépend de r.

Le plus simple consiste maintenant à introduire l'expression (VII-28) de p dans l'équation (3,3) du système (VII-25). Il vient:

$$(\text{VII-29}) \quad -\frac{\partial^2 u_{,11}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_{,11}}{\partial r} = \frac{4\pi G}{c^4}\rho c^2\left[-2 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}\right]$$

Bien que les calculs soient un peu longs, on intègre aisément cette équation de forme élémentaire, dont la solution s'écrit:

$$(\text{VII-30}) \quad u_{,11} = \frac{4\pi G\rho}{c^2}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{c^2}{\omega^2}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} - \frac{c^2}{\omega^2}\ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}{2} - \frac{c^2}{\omega^2} + B(\omega)\right]$$

avec $\lim_{\omega \to 0} B(\omega) = \frac{\alpha}{4}$.

Nous avons déjà remarqué que l'équation (1,1') ne contient que des dérivées premières. Il en résulte qu'une seule quadrature suffit pour établir la relation suivante:

(VII-31)

$$f \equiv u_{,00} + \frac{\omega^2}{c^2}u_{,22} - 2\frac{\omega}{c}u_{,02} - \frac{4\pi G\rho}{c^2}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{c^2}{\omega^2}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} + \frac{c^2}{\omega^2}\ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}{2} + C(\omega)\right]$$

où $C(\omega)$ désigne une constante d'intégration que nous renonçons à déterminer pour le moment. En soustrayant l'équation (0,2) de (0,0) (système (VII-25)), on obtient une équation pour $g \equiv u_{,00} - \frac{\omega}{c}u_{,02}$. Son intégration conduit au résultat ci-après:

(VII-32)

$$g \equiv u_{,00} - \frac{\omega}{c}u_{,02} \equiv \frac{4\pi G\rho}{c^2}\frac{c^2}{\omega^2}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} - \ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}{2}\right] + D(\omega)r^2 + E(\omega)$$

où D et E sont des constantes d'intégration. Enfin, on retrouve f' et f'' dans l'équation (3,3'), qui devient ainsi une équation pour la seule fonction $u_{,22}$:

(VII-33)

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_{,22}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial u_{,22}}{\partial r} - \frac{2}{r^4}u_{,22} = -\frac{4\pi G\rho}{c^2}\left[1 - \frac{c^2}{\omega^2 r^2} + \frac{c^2}{\omega^2 r^2}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} + \frac{2\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}{(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Or, le membre de gauche de (VII-33) peut s'écrire $-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{u_{,22}}{r})$, si bien que l'intégration de cette équation revient à une double quadrature. La solution de (VII-33), ainsi que les relations (VII-31) et (VII-32), permettent alors de déterminer $u_{,00}$ et $u_{,02}$. Sans insister sur les calculs détaillés, qui sont évidemment assez longs, nous donnons immédiatement, dans le tableau suivant, la solution complète du problème:

(VII-34)

$$u'_{00} \equiv \frac{4\pi G\rho}{c^2} r^2 \left[\frac{\omega^2 r^2}{6c^2} + \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{c^2}{\omega^2 r^2}\right)\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} - \left(1 + \frac{c^2}{\omega^2 r^2}\right) \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}{2} + 2\frac{c}{\omega r} \arcsin \frac{\omega r}{c} + A\frac{\omega^2}{c^2} + B\right] + C\frac{\omega^2 r}{c^2} + \frac{4\pi G\rho}{c^2} D$$

$$u'_{02} \equiv \frac{4\pi G\rho}{c^2} \frac{cr^2}{\omega} \left[\frac{\omega^2 r^2}{6c^2} - \frac{1}{2} + \left(1 + 2\frac{c^2}{\omega^2 r^2}\right)\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}{2} + 2\frac{c}{\omega r} \arcsin \frac{\omega r}{c} + A\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{B}{2}\right] + C\frac{\omega r}{c} + \frac{4\pi G\rho}{c^2}\frac{c}{\omega} E$$

$$u'_{11} \equiv u'_{33} \equiv \frac{4\pi G\rho}{c^2}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{c^2}{\omega^2}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} - \frac{c^2}{\omega^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}{2} - \frac{c^2}{\omega^2} + F\right]$$

$$u'_{22} \equiv \frac{4\pi G\rho}{c^2} \frac{c^2 r^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega^2 r^2}{6c^2} - 3 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}{2} + 2\frac{c}{\omega r} \arcsin \frac{\omega r}{c} + A\frac{\omega^2}{c^2}\right] + Cr$$

$$p \equiv \rho c^2 \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}\right]$$

avec: $\lim_{\omega \to 0} A = \frac{\alpha}{4}$ $\lim_{\omega \to 0} \frac{\omega^2}{2c}(D - \frac{\alpha}{4}) = -3$

$\lim_{\omega \to 0} B = -3$ $\lim_{\omega \to 0} \frac{\omega^2}{2c}E = -2$

$\lim_{\omega \to 0} C = 0$ $\lim_{\omega \to 0} F = \frac{\alpha}{4}$ $C(\rho = 0) = 0$

Quand $\rho = 0$, nous retrouvons la solution "dans le vide" (VII-3). Pour déterminer entièrement les constantes d'intégration, il faudrait connaître la solution à l'extérieur du cylindre, et exiger la continuité des potentiels et de leurs dérivées premières en r = a (bord du cylindre). Nous renoncerons à une telle étude dans le cadre de cette dissertation, nous réservant de revenir sur cette question dans un travail ultérieur.

Il vaut la peine de comparer la présente solution avec ce que nous avons trouvé à l'aide des équations en 2^{e} approximation. On se rappelle qu'avec cette méthode, on n'avait pas obtenu de termes "d'interférence" du type $\rho\frac{\omega r}{c}$ par exemple. Nous pouvons fournir l'explication de ce fait en développant u'_{02} en une série de puissances de $\frac{\omega r}{c}$ (ce qui revient à supposer, comme précédemment, que ρ et ω sont petits simultanément). En faisant abstraction des termes contenant des constantes indéterminées, on trouve que le premier terme non nul de ce développement vaut $-\frac{\pi G\rho}{40c^2}\frac{\omega^3 r^6}{c^3}$, expression qui est du 4^{e} ordre en ρ et $\frac{\omega r}{c}$. On comprend ainsi fort bien que les équations en 2^{e} approximation ne soient pas en mesure de nous donner autre chose que la simple superposition des solutions "statique" et "cinétique".

Enfin, il n'est pas sans intérêt d'évaluer numériquement l'ordre de grandeur des $u'_{\rho\sigma}$. Pour le 1^{er} terme de u'_{00} par exemple, en prenant $\rho = 1$ g/cm^3 (eau), r = 100 cm et $\frac{\omega r}{c} \simeq 1$ (très grande vitesse de rotation), nous trouvons une quantité de l'ordre 10^{-24}. C'est dire que la solution

(VII-34) est pratiquement "rigoureuse". Quant à savoir si une solution formellement exacte du problème du cylindre tournant est vraiment possible dans l'état actuel de nos connaissances à ce sujet, la complexité évidente des relations (VII-34) ne nous incite guère à beaucoup d'optimisme!

CHAPITRE VIII

RESUME ET CONCLUSION

Après avoir esquissé les grandes lignes de la théorie linéaire de Scherrer (TL), nous avons montré comment celle-ci permet d'obtenir des équations de champ en 1^{e} approximation, dont le grand avantage, par rapport aux équations approchées de la TQ, est d'être covariàntes.

L'application de ces équations au problème des ondes gravitationnelles planes, outre qu'elle confirme en tous points les résultats de la TQ en ce qui concerne les $g_{\mu\nu}$, conduit à la conclusion vraiment surprenante de l'existence d'une densité d'énergie définie négative. L'interprétation de ce fait étonnant reste à trouver.

Les mêmes équations de la TL sont ensuite exploitées pour résoudre deux problèmes classiques, dans l'approximation considérée: le champ gravitationnel à symétrie sphérique (Schwarzschild, cas extérieur), et le champ à symétrie cylindrique (cas extérieur et intérieur). La covariance des équations permet de traiter immédiatement chacun de ces problèmes dans le système de coordonnées le plus adéquat (coordonnées polaires et cylindriques, respectivement). Les résultats ainsi obtenus sont en accord avec la TQ.

Le traitement, dans la même optique, du problème du champ gravitationnel d'une particule chargée, requiert la connaissance des équations en 2^{e} approximation. Celles-ci sont développées au chapitre VI, toujours d'une manière covariante.

Ces équations en 2^{e} approximation devraient permettre

d'aborder également le problème du disque tournant (v. le terme $-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}$ de la métrique (VII-3)). Alors que cette méthode ne se justifie guère dans le cas extérieur, elle fournit un résultat peu "spectaculaire" dans le cas intérieur, dans la mesure où elle ne fait pas apparaître d'"interférences" entre les phénomènes de gravitation pure (ρ) et la rotation (ω). Mais ce fait s'explique tout naturellement quand on reprend le problème en 1^{e} approximation selon la méthode exposée au chapitre VII, paragraphe 5: les termes traduisant ces "interférences" sont au minimum du 4^{e} ordre. Une fois de plus, le procédé utilisé ici repose essentiellement sur la covariance des équations de la TL: la métrique fondamentale est non seulement fonction de r, mais encore non diagonale ($L_{,02} \neq 0$), contrairement à ce qui se passe avec les équations approchées de la TQ (métrique fondamentale: [1, -1, -1, -1]).

Le problème du cylindre tournant constitue donc un excellent exemple d'application de la TL, et cela, à d'autant plus forte raison que nous sommes conduits à un système d'équations différentielles assez compliquées, certes, mais dont la solution a tout de même pu être établie. C'est pourquoi notre méthode ouvre peut-être des perspectives intéressantes à propos de problèmes non encore complètement résolus de la relativité générale (problème du gyroscope, par exemple). Comme nous l'avons souligné à la fin du chapitre VII, la structure assez compliquée des $u_{,\rho\sigma}$ donnés par les formules (VII-34) illustre fort bien la nature mathématique des difficultés de la question. En tout état de cause, une solution rigoureuse du problème du disque tournant ne semble pas pour demain!

BIBLIOGRAPHIE

{1}. L. Rosenfeld: Zur Quantelung der Wellenfelder (Ann. Phys., 5, 1930, 113).

{2}. L. Rosenfeld: La théorie quantique des champs (Ann. Inst. H. Poincaré, 2, 1932, 25).

{3}. G. D. Birkhoff: Matter, electricity and gravitation in flat space-time (Proc. Nat. Acad. Sc., 29, 1943, 231), etc..

{4}. W. Scherrer: Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie (Zeits. f. Phys., 138, 1954, 16).

{5}. W. Scherrer: Zur linearen Feldtheorie. I. (Zeits. f. Phys., 139, 1954, 44).

{6}. W. Scherrer: Berichtigung und Ergänzung "zur linearen Feldtheorie" (Zeits. f. Phys., 140, 1955, 160).

{7}. W. Scherrer: Zur linearen Feldtheorie. II. (Zeits. f. Phys., 140, 1955, 164).

{8}. W. Scherrer: Zur linearen Feldtheorie. III. (Zeits. f. Phys., 141, 1955, 374).

{9}. W. Scherrer: Zur linearen Feldtheorie. IV. (Zeits. f. Phys., 144, 1956, 373).

{10}. W. Scherrer: Zur linearen Feldtheorie. V. (Zeits. f. Phys., 152, 1958, 319).

{11}. W. Scherrer: Bericht über eine einheitliche Feldtheorie (Zeits. f. Phys., 174, 1963, 351).

{12}. W. Scherrer: Darstellung der Gravitationsenergie (Helv. Phys. Acta, 37, 1964, 317).

{13}. W. Scherrer: Ergänzung der linearen Feldtheorie (Helv. Phys. Acta, 39, 1966, 513).

{14}. W. Scherrer: Die kosmologischen Lösungen der linearen Feldtheorie (Zeits. f. Astrophys., 65, 1967, 30).

{15}. Jean E. Charon: Relativité générale (Kister, Genève, 1963).

{16}. H. Weyl: Space, Time, Matter (Dover Publications, 1950).

{17}. M.-A. Tonnelat: Les vérifications expérimentales de la relativité générale (Masson, Paris, 1964).

{18}. P. Ehrenfest: Phys. Zeits., 10, 1909, 918.

{19}. F. Harress: Dissertation (Iena, 1912).

{20}. G. Sagnac: Comptes-rendus, 157, 1913, 708 et 1410.

{21}. G. Sagnac: Journ. de phys., 4, 1914, 177.

{22}. B. Pogany: Ann. phys., 80, 1926, 217.

{23}. B. Pogany: Naturwiss., 15, 1927, 177.

{24}. F. Prunier: Comptes-rendus, 200, 1935, 46.

{25}. A. Dufour: Comptes-rendus, 200, 1935, 894.

{26}. P. Langevin: Comptes-rendus, 200, 1935, 49, 1161, 1448.

{27}. C. W. Berenda: Phys. Rev., 62, 1942, 280.

{28}. A. Metz: Journ. de phys., 13, 1952, 224.

{29}. A. S. Eddington: The mathematical Theory of Relativity (University Press, Cambridge, 1954).

{30}. C. Møller: The Theory of Relativity (Oxford, 1952).

{31}. M.-A. Tonnelat: Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité (Masson, Paris, 1959).

{32}. H. Arzeliès: Cinématique relativiste (Gauthier-Villars, Paris).

{33}. E. L. Hill: Phys. Rev., 69, 1946, 488.

{34}. N. Rosen: Phys. Rev., 71, 1947, 54.

{35}. G. Trocheris: Phil. Mag., 40, 1949, 1143.

{36}. H. Takeno: Prog. Theor. Phys., 7, 1952, 367.

{37}. B. Kursunoglu: Proc. Cambr. Phil. Soc., 47, 1951, 177.

{38}. S. Kichenassamy: Bol. Univ. Parana, no. 1, 1961, 1.

{39}. Landau et Lifchitz: Théorie du champ (Ed. de la Paix, Moscou).

{40}. G. L. Clark: Proc. Roy. Soc. Edinb., 62, 1947, 434.

{41}. G. L. Clark: Proc. Cambr. Phil. Soc., 45, 1949, 405.

{42}. G. L. Clark: Proc. Roy. Soc. London, 201, 1950, 510.

{43}. G. L. Clark: Proc. Roy. Soc. London, 201, 1950, 488.

{44}. G. Salzmann et A. H. Taub: Phys. Rev., 95, 1954, 1659.

{45}. R. C. Tolman: Relativity, Thermodynamics and Cosmology (Clarendon Press, Oxford, 1962).

{46}. W. Scherrer: Ueber die Selbstenergie einer geladenen Masse (Helv. Phys. Acta, 38, 1965, 215).

Remerciements

Nous ne voudrions pas mettre un point final à cette dissertation sans exprimer notre plus vive gratitude à M. W. Scherrer, professeur, dont la clarté des directives et les encouragements constants nous ont été d'un précieux secours dans l'élaboration de ce travail. Nos remerciements s'adressent également à la maison Robert S.A., à Moutier, qui a voué tous ses soins à l'impression du présent fascicule, ainsi qu'à la firme IBM, extension suisse, à Zurich, qui a mis très aimablement une machine à écrire à notre disposition.